$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Devoir pour le lundi 2 décembre 2019

Le devoir doit être rédigé sur une copie simple recto-verso.

I. On considère l'équation $x^2 - 2mx + 1 = 0 \quad (1)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où m désigne un paramètre réel.

1°) Calculer le discriminant réduit Δ_m' de l'équation (1) en fonction de m.

2°) Déterminer l'ensemble E des réels m pour lesquelles l'équation (1) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

3°) Pour $m \in E$, on note x_1 la plus grande des deux racines de (1) et x_2 la plus petite.
Exprimer x_1 et x_2 en fonction de m.

4°) À l'aide d'un logiciel de calcul formel ou du site « dcode » (ou même de l'application « photomath »), déterminer le sous-ensemble F de E constitué des réels m tels que $x_1 > 2$.
On ne cherchera pas à résoudre la question.

5°) Pour $m \in E$, exprimer $x_1^3 + x_2^3$ en fonction de m.

II. Soit a, b, c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Que vaut l'expression $\mathrm{A} = a^4 + (ab + c)^2 + (ac - b)^2$?

Corrigé du devoir pour le 2-12-2019

I. $x^2 - 2mx + 1 = 0 \quad (1)$ $\qquad$ (m : paramètre réel)

1°)

$\Delta_m' = m^2 - 1$

2°) On cherche l'ensemble E des réels m pour lesquelles l'équation (1) admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

Pour que (1) admette deux racines réelles distinctes, il faut et il suffit que $\Delta_m' > 0$ (i).

(i) est successivement équivalente à :

$m^2 - 1 > 0$

$m < -1$ ou $m > 1$

On en déduit que $E =]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

3°) On a $x_1 = m + \sqrt{m^2 - 1}$ et $x_2 = m - \sqrt{m^2 - 1}$.

4°) On cherche les réels $m \in E$ tels que $m + \sqrt{m^2 - 1} > 2$.

On trouve $F = \left]\dfrac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

5°) Pour $m \in E$, on pose $\mathrm{A} = {x_1}^3 + {x_2}^3$.

1ère méthode :

$$\mathrm{A} = \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)^3 + \left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)^3$$

$$= m^3 + 3m^2\sqrt{m^2 - 1} + 3m\left(m^2 - 1\right) + \left(\sqrt{m^2 - 1}\right)^3 + m^3 - 3m^2\sqrt{m^2 - 1} + 3m\left(m^2 - 1\right) - \left(\sqrt{m^2 - 1}\right)^3$$

$$= 2m^3 + 3m^3 - 3m + 3m^3 - 3m$$

$$= 8m^3 - 6m$$

On peut vérifier le résultat à l'aide des outils dont on dispose (logiciel de calcul formel, site « dcode », « photomath »…

2e méthode :

On utilise la somme et le produit des racines.

$$
\begin{aligned}
A &= x_1^3 + x_2^3 \\
&= \left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) \quad \text{(identité remarquable cubique)} \\
&= 2m\left(x_1^2 - 1 + x_2^2\right) \\
&= 2m\left[\left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2 - 1\right] \\
&= 2m\left[\left(x_1+x_2\right)^2 - 2\times 1 - 1\right] \\
&= 2m\left[\left(2m\right)^2 - 3\right] \\
&= 2m\left(4m^2 - 3\right)
\end{aligned}
$$

II.

$$
\begin{aligned}
A &= a^4 + \left(ab+c\right)^2 + \left(ac-b\right)^2 \\
&= a^4 + a^2b^2 + 2abc + c^2 + a^2c^2 - 2acb + b^2 \\
&= a^2\left(a^2+b^2+c^2\right) + c^2 + b^2 \\
&= a^2 \times 1 + c^2 + b^2 \quad \text{(on utilise la condition } a^2+b^2+c^2=1\text{)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$