1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 22 novembre 2019 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….. **Note : ….. / 20**

I. (1 point)

Développer et réduire l'expression $A=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$ où a est un réel non nul. On attend seulement 2-3 lignes de calcul.

………

………

………

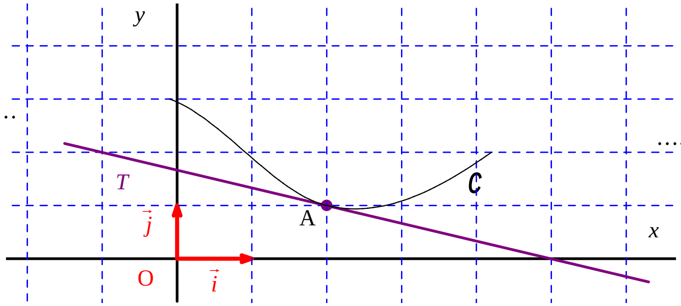
II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère une fonction *f* dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous. La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente T au point A d'abscisse 2.

1°) Par lecture graphique, compléter l'égalité donnant le nombre dérivé de *f* en 2 : $f'(2)=$……….

2°) Écrire une équation de T.

……………………………………………………



III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Rappeler l'expression de $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x)=\text{…………}$$

1°) Déterminer les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points A, B, C, D d'abscisses respectives 1, – 2, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Écrire les coefficients directeurs dans l'ordre (une seule valeur à chaque fois).

……… ……… ……… ………

Sur le graphique donné en annexe, placer le point A puis tracer la tangente T en ce point.

2°) Sur le graphique donné en annexe, tracer la droite L d'équation $y=x+1$.
Le but de cette question est de déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de L.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et L sont les solutions de l'équation ……………………………… (1).

Résoudre l'équation (1) (sans toutefois écrire l'ensemble des solutions) et conclure.

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2.
Écrire les abscisses sans égalités, en séparant les valeurs par un point-virgule.

……………………………

IV. (4 points : 1 point par calcul)

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$. On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera les résultats sans effectuer de transformations. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x)=$ ....

2°) $f(x)=\dfrac{1}{3x-1}$ $\quad f'(x)=$ .... (ne pas développer le dénominateur)

3°) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ $\quad f'(x)=$ .... (ne pas développer le dénominateur)

4°) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{3}$ $\quad f'(x)=$ ....

V. (2 points)

On considère les fonctions $f : x \mapsto (x-1)^2+x^2+(x+1)^2$ et $g : x \mapsto x^2-2(x-1)^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

À quelle famille de fonctions appartiennent *f* et *g* ? Répondre par une phrase la plus précise possible.

....

Déterminer les extremums de *f* et *g* sur $\mathbb{R}$.
Faire une phrase pour chacune des deux fonctions sur le modèle suivant à recopier en l'adaptant et en le complétant pour chacune des deux fonctions : « *f* admet … pour maximum / minimum global sur $\mathbb{R}$; il est atteint en … . ».

• ....

• ....

Justifier pour l'une des deux fonctions (au choix).

....

....

....

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

À tout réel *m* on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx^2+(2m-1)x+m$ définie sur $\mathbb{R}$.
Les trois questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) f_m est-elle toujours une fonction polynôme du second degré ? Justifier.

....

....

....

....

Lorsque f_m est une fonction polynôme du second degré, calculer son discriminant Δ_m. Écrire le résultat puis les calculs justifiant ce résultat.

.... (une seule égalité, résultat sous forme simplifiée)

....

....

....

2°) Calculer $f_m'(x)$ en fonction de *x* et de *m*.

$\forall x \in \mathbb{R}$ .... (une seule égalité)

3°) Dans cette question, on prend $m=\dfrac{1}{2}$. Que peut-on dire du signe de $f_{\frac{1}{2}}(x)$? Justifier en tâchant d'être le plus concis possible.

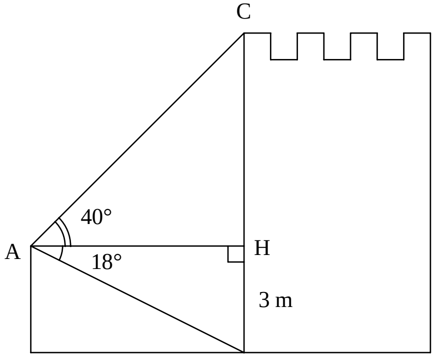
....

....

....

VII. (1 point)

Un géomètre veut déterminer la hauteur de la tour. Il dispose des mesures des angles $\widehat{BAH}$ et $\widehat{CAH}$ ainsi que de la longueur BH marquées sur la figure ci-dessous.



Calculer la hauteur *h* de la tour en mètre.

$h =$ .... (valeur exacte)

La valeur décimale approchée d'ordre 2 par défaut de *h* est ………. .

Indication : On pensera à passer par la valeur de AH.

VIII. (1 point)

Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3.
Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à 2.

Indication : Utiliser une équation de $\mathcal{C}$.

…..………

…..………

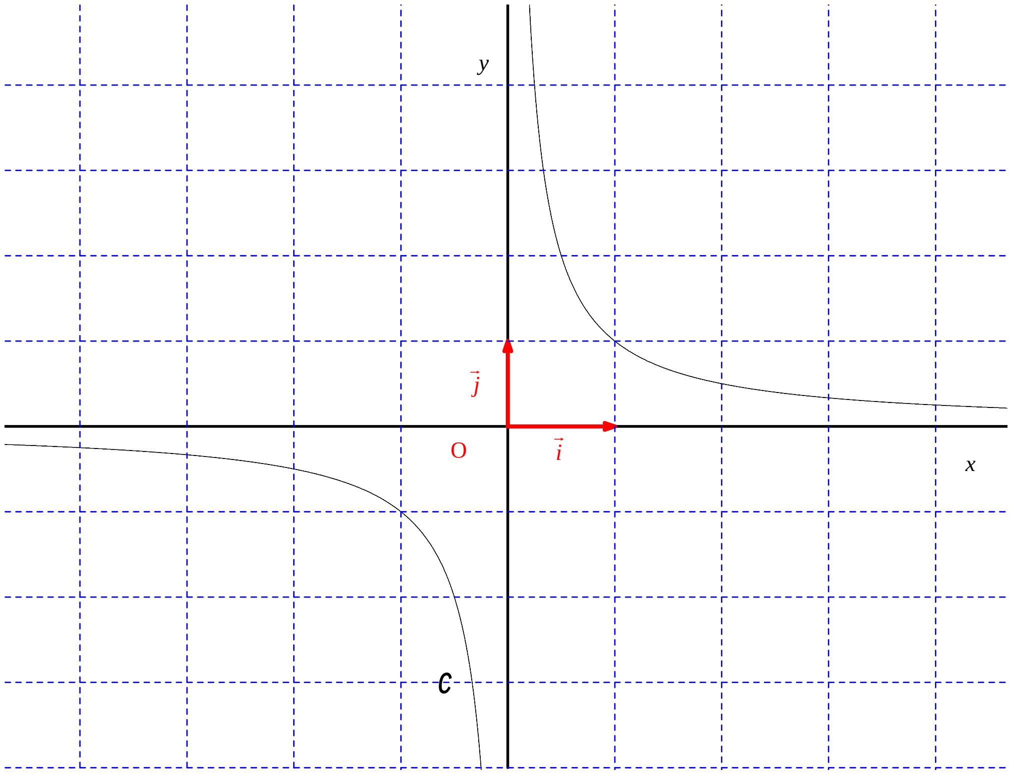
…..………

…..………

…..………

…..………

Annexe exercice III.



Corrigé du contrôle du 22-11-2019

I.

Développer et réduire l'expression $A=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$ où a est un réel non nul. On attend seulement 2-3 lignes de calcul.

L'énoncé dit bien « développer » et non « factoriser ».

$A=\left(a^2+2\times \cancel{a}\times\frac{1}{\cancel{a}}+\frac{1}{a^2}\right)-\left(a^2-2\times \cancel{a}\times\frac{1}{\cancel{a}}+\frac{1}{a^2}\right)$ (identités remarquables)

$=\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)-\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)$

$=a^2+2+\frac{1}{a^2}-a^2+2-\frac{1}{a^2}$

$=4$ (le résultat ne dépend pas de a)

II.

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous. La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente T au point A d'abscisse 2.

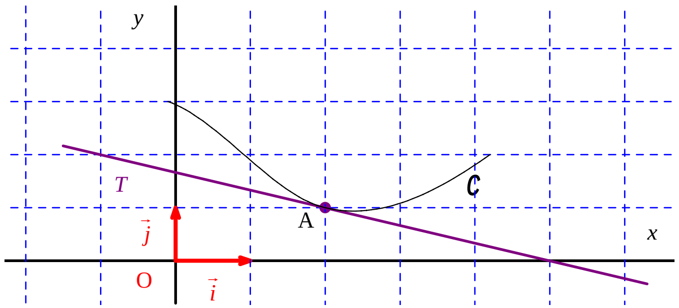
1°) Par lecture graphique, compléter l'égalité donnant le nombre dérivé de f en 2 : $f'(2)=-\frac{1}{3}$.

On considère le trajet qui part du point A de la droite au point $B(5\,;0)$ qui est aussi sur la droite.
On avance de 3 unités horizontalement vers la droite et de 1 unité verticalement vers le bas.
Le coefficient directeur de T est donc $\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$.

Une autre manière consiste à dire que le vecteur $\vec{u}(3\,;-1)$ (remarquons au passage que $\vec{u}$ est égal à $\overrightarrow{AB}$) est un vecteur directeur de la droite T.

2°) Écrire une équation de T.

$y=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}x$ ou $y=\frac{5}{3}-\frac{x}{3}$



On sait que T est la droite passant par le point A et de coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.
Or A a pour coordonnées $(2\,;1)$.

T a donc pour équation $y=-\frac{1}{3}(x-2)+1$ (formule du cours : $y=m(x-x_A)+y_A$) ce qui donne, en développant et réduisant le membre de droite, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

On peut aussi utiliser directement utiliser la formule du cours $y=f'(2)(x-2)+f(2)$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Rappeler l'expression de $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

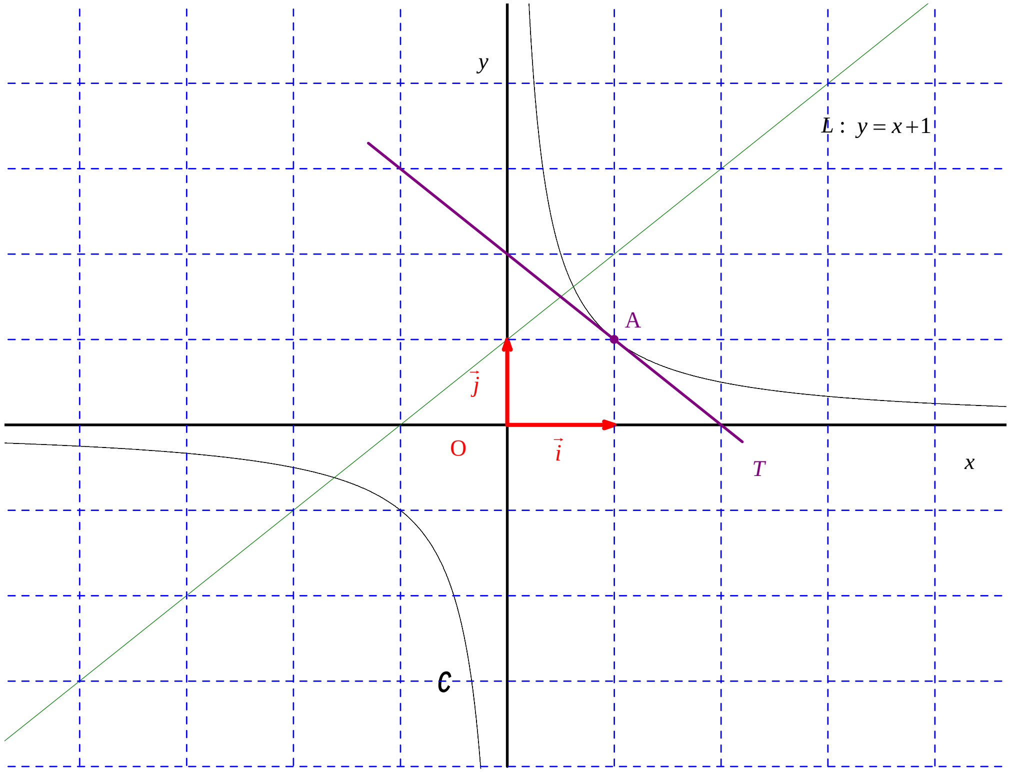
1°) Déterminer les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points A, B, C, D d'abscisses respectives 1, – 2, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Écrire les coefficients directeurs dans l'ordre (une seule valeur à chaque fois).

$-1 \qquad -\frac{1}{4} \qquad -4 \qquad -3$

On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $a \neq 0$ est égal à $f'(a)$.

On calcule donc $f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$, $f'(-2)$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Sur le graphique donné en annexe, placer le point A puis tracer la tangente T en ce point.



2°) Sur le graphique donné en annexe, tracer la droite L d'équation $y = x + 1$.
Le but de cette question est de déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de L.

On sait que f est la fonction qui à tout réel x non nul associe $\frac{1}{x}$ donc $\mathcal{C}$ a pour équation $y = \frac{1}{x}$.
$\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et L sont les solutions de l'équation $\frac{1}{x} = x + 1 \quad (1)$.

Résoudre l'équation (1) (sans toutefois écrire l'ensemble des solutions) et conclure.

On résout dans $\mathbb{R}^*$.

(1) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$1 = x(x+1)$

$x^2 + x = 1$

$x^2 + x - 1 = 0$

On considère le polynôme $x^2 + x - 1$. C'est un polynôme du second degré.
On calcule son discriminant Δ est égal à 5 (calcul mental).

Comme $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

On vérifie la résolution à l'aide de la calculatrice.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et L sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2.
Écrire les abscisses sans égalités, en séparant les valeurs par un point-virgule.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \; ; -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

On sait que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $a \neq 0$ est égal à $f'(a)$.
On cherche donc les réels a non nuls tels que $f'(a) = -2 \quad (2)$.

(2) est successivement équivalente à :

$-\frac{1}{a^2} = -2$

$a^2 = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

IV.

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$. On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera les résultats sans effectuer de transformations. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

2°) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ $\qquad f'(x) = -\frac{3}{(3x-1)^2}$ (ne pas développer le dénominateur)

3°) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ (ne pas développer le dénominateur)

4°) $f(x) = \frac{x^2+x}{3}$ $\qquad f'(x) = \frac{2x+1}{3}$

1°) On utilise la formule de dérivation d'une somme.

2°) On applique la formule $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 3x-1$.

On a $u'(x)=3$.

On ne développe pas le dénominateur.

3°) On applique la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-(x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

On laisse le dénominateur sous la forme d'une puissance (carré, cube…). Il ne faut pas développer.

On n'effectue pas de transformation.

4°) Pour dériver le plus commodément possible, on effectue la réécriture : $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+x)$.

Par dérivation, on obtient la formule « brute », $f'(x)=\frac{1}{3}(2x+1)$ que l'on transforme immédiatement en

$f'(x)=\frac{2x+1}{3}$.

V.

On considère les fonctions $f : x \mapsto (x-1)^2+x^2+(x+1)^2$ et $g : x \mapsto x^2-2(x-1)^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

À quelle famille de fonctions appartiennent *f* et *g* ? Répondre par une phrase la plus précise possible.

Les fonctions *f* et *g* appartiennent à la famille des fonctions polynômes du second degré.

La réponse à cette question ne peut se faire qu'en développant au moins mentalement les expressions de *f* et *g*.

Dans chaque cas, on obtient une expression de la forme ax^2+bx+c où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $a\neq 0$.

Ce développement est nécessaire pour la question suivante.

Déterminer les extremums de *f* et *g* sur $\mathbb{R}$.

Faire une phrase pour chacune des deux fonctions sur le modèle suivant à recopier en l'adaptant et en le complétant pour chacune des deux fonctions : « *f* admet … pour maximum / minimum global sur $\mathbb{R}$; il est atteint en … . ».

• *f* admet 2 pour minimum global sur $\mathbb{R}$; il est atteint en 0.

• *g* admet 2 pour maximum global sur $\mathbb{R}$; il est atteint en 2.

Justifier pour l'une des deux fonctions (au choix).

Pour justifier, on utilise les expressions développées réduites des deux fonctions.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=3x^2+1$

Cette expression permet de voir immédiatement que le minimum global de *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à 1 et qu'il est atteint en 0.

Il n'y a même pas besoin d'invoquer la propriété des fonctions polynômes du second degré.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x)=-x^2+4x-2$

On applique le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

Le minimum est égal atteint en $-\frac{-4}{2\times 1}=2$ et vaut $g(2)=2^2-2\times(2-1)^2=2$.

On vérifie les résultats graphiquement en traçant les courbes représentatives sur l'écran de la calculatrice.

VI.

À tout réel *m* on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx^2+(2m-1)x+m$ définie sur $\mathbb{R}$.

Les trois questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) f_m est-elle toujours une fonction polynôme du second degré ? Justifier.

On peut affirmer que f_m est un polynôme de degré au plus égal à 2.

On discute suivant le coefficient de x^2 c'est-à-dire *m*.

1er cas : $m\neq 0$

Dans ce cas, f_m est une fonction polynôme du second degré.

2e cas : $m=0$

Dans ce cas, $\forall x\in\mathbb{R} \quad f_0(x)=-x$. f_0 est donc une fonction polynôme de degré 1.

Lorsque f_m est une fonction polynôme du second degré, calculer son discriminant Δ_m. Écrire le résultat puis les calculs justifiant ce résultat.

$\Delta_m=1-4m$ (une seule égalité, résultat sous forme simplifiée)

On se place dans le cas où $m \neq 0$.

Les coefficients du polynôme sont m (coefficient de x^2), $2m-1$ (coefficient de x), m (coefficient constant).

$\Delta_m = (2m-1)^2 - 4 \times m \times m$ (formule de définition du discriminant)

$= (2m-1)^2 - 4m^2$

$= \cancel{+4m^2} - 4m + 1 \cancel{-4m^2}$ (identité remarquable)

$= 1-4m$

2°) Calculer $f_m'(x)$ en fonction de x et de m.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = 2mx + 2m - 1 \text{ (une seule égalité)}$$

On applique l formule de dérivation d'une somme en considérant les fonctions $u : x \mapsto mx^2$, $v : x \mapsto (2m-1)x$, $w : x \mapsto m$.

On a $f_m = u+v+w$.

Les formules de dérivation donnent $u'(x) = m \times 2x = 2mx$, $v'(x) = (2m-1)\times 1 = 2m-1$, $w'(x) = 0$.

Il ne faut pas oublier que m est un paramètre c'est-à-dire une constante par rapport à x qui est la variable des foncions.
Ainsi, la fonction w est constante et a donc pour dérivée la fonction nulle.

On peut donc écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = 2mx + 2m - 1$.

3°) Dans cette question, on prend $m = \frac{1}{2}$. Que peut-on dire du signe de $f_{\frac{1}{2}}(x)$? Justifier en tâchant d'être le plus concis possible.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)x + \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}x^2 + (1-1)x + \frac{1}{2}$

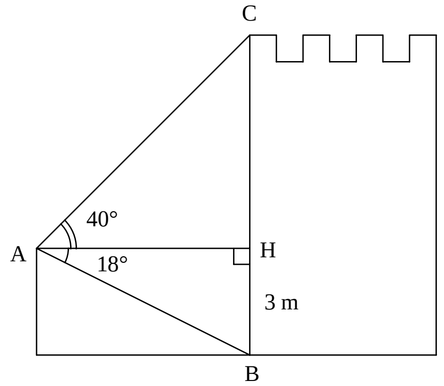
$= \frac{1}{2}x^2 + 0x + \frac{1}{2}$

$= \frac{x^2+1}{2}$

L'expression de $f_{\frac{1}{2}}$ permet de voir tout de suite que $f_{\frac{1}{2}}(x)$ est strictement positif pour tout réel x.

VII.

Un géomètre veut déterminer la hauteur de la tour. Il dispose des mesures des angles $\widehat{\text{BAH}}$ et $\widehat{\text{CAH}}$ ainsi que de la longueur BH marquées sur la figure ci-dessous.



Calculer la hauteur h de la tour en mètre.

$$h = 3 + 3\frac{\tan 40°}{\tan 18°} \text{ (valeur exacte)}$$

La valeur décimale approchée d'ordre 2 par défaut de h est 10,74.

Indication : On pensera à passer par la valeur de AH.

On écrit $\text{AH} = \frac{3}{\tan 18°}$ m (dans le triangle ABH rectangle en H).

On écrit ensuite $\text{CH} = \text{AH} \times \tan 40°$ (dans le triangle ACH rectangle en H).

On a donc $\text{CH} = \frac{3}{\tan 18°} \times \tan 40°$ m $= \frac{3\tan 40°}{\tan 18°}$ m.

On peut donc écrire $\text{BC} = 3 + 3\frac{\tan 40°}{\tan 18°}$ m.

Avec la calculatrice, on trouve $h = 10,747449362...$.

VIII.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3.
Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à 2.

Indication : Utiliser une équation de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 9$.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à 2 sont les solutions de l'équation $x^2 + 2^2 = 9 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$x^2 + 4 = 9$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est égale à 2 sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.