$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Devoir pour le mercredi 13 novembre 2019

Le devoir doit être rédigé sur une copie simple recto-verso.

On attend une rédaction soignée pour les exercices **I** et **II**.

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^3 - 11x^2 = 3x$.

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2}{x+1} \geqslant 1$.

III. On pose $P(x) = (x+1)(4x-1) - 2(3x+2)(x-1)$.

1°) Développer et réduire $P(x)$.

2°) Déterminer la forme canonique de $P(x)$. On fera apparaître les différentes étapes.

Corrigé du DM pour le 13-11-2019

I.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^3-11x^2=3x \quad (1)$.

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$4x^3-11x^2-3x=0$

$x\left(4x^2-11x-3\right)=0$

Considérons le polynôme $4x^2-11x-3$.
C'est un polynôme du second degré.

$\Delta=(-11)^2-4\times4\times(-3)$

$=121+48$

$=169$

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2 :

$x_1=\dfrac{11-\sqrt{169}}{8}$

$=\dfrac{11-13}{8}$

$=-\dfrac{1}{4}$

$x_2=\dfrac{11+\sqrt{169}}{8}$

$=\dfrac{11+13}{8}$

$=3$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\left\{0\,;3\,;-\dfrac{1}{4}\right\}$.

On vérifie le résultat par exemple avec photomath.

II.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x^2}{x+1}\geqslant1 \quad (2)$.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$\dfrac{x^2}{x+1}-1\geqslant0$

$\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\geqslant0$

Considérons le polynôme x^2-x-1.
C'est un polynôme du second degré.

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)$

$=1+4$

$=5$

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2 : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On dresse un tableau de signes en faisant attention à bien positionner les valeurs sur la première ligne.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Signe de x^2-x-1		+	|	+	0	−	0	+	
Signe de $x+1$		−	0	+	|	+	|	+	
Signe de $\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$		−	||	+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (2) est $S=\left]-1\,;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$.

On vérifie le résultat par exemple avec photomath.

III.

$P(x)=(x+1)(4x-1)-2(3x+2)(x-1)$

1°)

$\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=4x^2-x+4x-1-2\left(3x^2-3x+2x-2\right)$

$=4x^2+3x-1-2\left(3x^2-x-2\right)$

$=4x^2+3x-1-6x^2+2x+4$

$=-2x^2+5x+3$

2°) On reprend la forme développée réduite. On effectue toutes les étapes à la main (pas d'application de la formule littérale).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right]$$

$$= -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right]$$

$$= \frac{49}{8} - 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$$