TS1 spé

Contrôle du jeudi 10 octobre 2019 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (5 points : 1 point + 3 points + 1 point)

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs vérifiant la relation $x+y=xy \quad (1)$.

Justifier que $(1) \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=1 \quad (1')$.

………

………

………

En interprétant l'égalité $(1')$ en termes de diviseurs associés, déterminer les couples cherchés.
On complètera la chaîne d'équivalences ci-dessous.

Pour la première ligne, on attend une phrase sans égalité.

$(1') \Leftrightarrow$ ………………………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Rédiger une conclusion claire sur le modèle « Les couples cherchés sont …………………….. » à recopier et compléter.

………

………

II. (3 points)

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a=n^3+1$ et $b=n^4+2n$

Vérifier que $a^2=n^2b+1$. En déduire que a et b sont premiers entre eux. On justifiera avec précision en donnant bien tous les arguments utiles.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (3 points)

1°) Compléter les phrases :

Le plus petit multiple positif de 2019 autre que 2019 dont l'écriture en base dix se termine par 19 est ………………

Le plus petit multiple positif de 2019 dont l'écriture en base dix se termine par 444 est ………………

2°) Écrire 2019 comme combinaison linéaire de 2 et de 5 à coefficients positifs.

……………………………….. (une seule réponse)

IV. (2 points)

Compléter le critère de divisibilité suivant :

Un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si …………………..

Soit N et N' deux entiers naturels dont l'écriture en base dix est constituée des mêmes chiffres mais pas dans le même ordre.
L'implication suivante est-elle vraie ou fausse ? Répondre par vrai ou faux en justifiant sur les lignes ci-après.

« N est divisible par 3 » $\Rightarrow$ « N' est divisible par 3 »

…………

………

………

………

………

V. (2 points)

Déterminer un entier naturel non nul dont l'écriture en base dix vérifiant les conditions suivantes :
C_1 : son écriture en base dix ne comporte que des 0 et des 1 ;
C_2 : il est divisible par 3 ;
C_3 : il est divisible par 5.

…………………… (une seule réponse)

VI. (2 points)

On compte de 7 en 7, à partir de – 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.
Combien y a-t-il de nombres atteints (– 38 y compris) ?

…………………………

VII. (1 point)

Soit x et y deux entiers relatifs quelconques.
Compléter par le bon mot l'équivalence :

« xy est pair » $\Leftrightarrow$ « x est pair » …. « y est pair ».

VIII. (2 points)

Le but de l'exercice est de démontrer par trois méthodes indépendantes que pour tout entier relatif n, n^2+n est un nombre pair.

Pour chacune des méthodes, on fixe un entier relatif n quelconque.

1ère méthode : On procède directement.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① On sait que le produit d'un entier pair par un entier quelconque est pair.
② On peut dire que n et $n+1$ sont des entiers consécutifs.
③ On a $n^2+n=n(n+1)$.
④ On en déduit que n^2+n est pair.
⑤ Par conséquent, l'un de ces entiers est pair (et l'autre impair).

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

………

2e méthode : On procède par disjonction de cas. Compléter le 1er cas et rédiger le 2e cas.

● 1er cas : n est pair

Dans ce cas, on sait que n^2 est aussi un nombre pair.

Or la somme de deux nombres pairs est un nombre ……….. .

On en déduit que n^2+n est un nombre ……….. .

● 2e cas : n est impair

………

………

………

3e méthode : On procède directement.

On sait que le carré d'un entier a la même parité que cet entier donc n^2 a la même parité que n.

Or la somme de deux entiers de même parité est un entier ………. .

On en déduit que n^2+n est un nombre pair.

Corrigé du contrôle du 10-10-2019

I.

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs vérifiant la relation $x+y=xy \quad (1)$.

Justifier que $(1) \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=1 \quad (1')$.

$(1) \Leftrightarrow xy-x-y=0$

$\Leftrightarrow xy-x-y+1=1$

$\Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)=1$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=1 \quad (1')$

En interprétant l'égalité $(1')$ en termes de diviseurs associés, déterminer les couples cherchés.
On complètera la chaîne d'équivalences ci-dessous.

Pour la première ligne, on attend une phrase sans égalité.

$(1') \Leftrightarrow x-1$ et $y-1$ sont $\boxed{\text{des}}$ diviseurs associés de 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Rédiger une conclusion claire sur le modèle « Les couples cherchés sont …………………….. » à recopier et compléter.

Les couples cherchés sont $(0\,;\,0)$ et $(2\,;\,2)$.

II.

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a=n^3+1$ et $b=n^4+2n$
Vérifier que $a^2=n^2b+1$. En déduire que a et b sont premiers entre eux. On justifiera avec précision en donnant bien tous les arguments utiles.

$a^2=(n^3+1)^2$

$=n^6+2n^3+1$

$=n^2(n^4+2n)+1$

$=n^2b+1$

L'égalité $a^2=n^2b+1$ est équivalente à $a^2-n^2b=1$ qui s'écrit aussi $(n^3+1)a-n^2b=1$.

Comme $n\in\mathbb{Z}$ par hypothèse, $n^3+1\in\mathbb{Z}$ et $-n^2\in\mathbb{Z}$. Il existe donc une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs égale à 1. On en déduit que a et b sont premiers entre eux (propriété du cours).

III.

1°) Compléter les phrases :

Le plus petit multiple positif de 2019 autre que 2019 dont l'écriture en base dix se termine par 19 est 203919.

Le plus petit multiple positif de 2019 dont l'écriture en base dix se termine par 444 est 153444.

On utilise la calculatrice grâce à un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 2019x$.

Le plus petit multiple positif de 2019 qui termine par 19 est $203919=101\times 2019$.

Le plus petit multiple positif de 2019 qui termine par 444 est $152444=76\times 2019$.

2°) Écrire 2019 comme combinaison linéaire de 2 et de 5 à coefficients entiers naturels.

$2\times 2+5\times 403$ (une seule réponse)

Il y a plusieurs possibilités. Il s'agit d'expressions de la forme $2u+5v$ avec u et v entiers naturels.

$2\times 962+5\times 19$
$2\times 22+5\times 395$
$2\times 71+5\times 401$
$2\times 1007+5\times 1$
$2\times 252+5\times 303$

IV.

Compléter le critère de divisibilité suivant :

Un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres de son écriture en base 10 est divisible par 3.

Soit N et N' deux entiers naturels dont l'écriture en base dix est constituée des mêmes chiffres mais pas dans le même ordre.
L'implication suivante est-elle vraie ou fausse ? Répondre par vrai ou faux en justifiant sur les lignes ci-après.

« N est divisible par 3 » ⇒ « N' est divisible par 3 »

Vrai

Si N est divisible par 3, alors la somme des chiffres de son écriture en base 10 est divisible par 3.
Or N et N' sont deux entiers naturels dont l'écriture en base dix est constituée des mêmes chiffres mais pas dans le même ordre donc la somme des chiffres de l'écriture en base 10 de N est égale à celle de N'.
On en déduit que N' est divisible par 3.

V.

Déterminer un entier naturel non nul dont l'écriture en base dix vérifiant les conditions suivantes :
C_1 : son écriture en base dix ne comporte que des 0 et des 1 ;
C_2 : il est divisible par 3 ;
C_3 : il est divisible par 5.

1110 (une seule réponse)

D'après la condition C_3, un tel entier se termine par 0 ou 5.
D'après la condition C_1, il se termine donc par 0.
D'après la condition C_2, la somme de ses chiffres en base 10 est divisible par 3.
Le nombre de 1 qui le compose doit donc être un multiple de 3.

On peut donner beaucoup d'autres entiers naturels qui vérifient les trois conditions simultanément : 1001010, 1111110…

VI.

On compte de 7 en 7, à partir de – 38, jusqu'au plus grand nombre inférieur ou égal à 365.
Combien y a-t-il de nombres atteints (– 38 y compris) ?

58

Les nombres visités sont les entiers de la forme $-38+7k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On cherche les entiers naturels k tels que $-38+7k \leqslant 365$.

Cette inégalité est équivalente à $k \leqslant \frac{403}{7}$.

D'après la calculatrice, $\frac{403}{7} = 57,5714285...$.

On en déduit que les entiers k cherchés sont les entiers vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 57$.

Il y a donc 58 nombres atteints.

On peut aussi utiliser la commande « rép » de la calculatrice.

VII.

Soit x et y deux entiers relatifs quelconques.
Compléter par le bon mot l'équivalence :

« xy est pair » ⇔ « x est pair » ou « y est pair ».

VIII.

Le but de l'exercice est de démontrer par trois méthodes indépendantes que pour tout entier relatif n, n^2+n est un nombre pair.

Pour chacune des méthodes, on fixe un entier relatif n quelconque.

1^ère^ méthode : On procède directement.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① On sait que le produit d'un entier pair par un entier quelconque est pair.
② On peut dire que n et $n+1$ sont des entiers consécutifs.
③ On a $n^2+n=n(n+1)$.
④ On en déduit que n^2+n est pair.
⑤ Par conséquent, l'un de ces entiers est pair (et l'autre impair).

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

③ ② ⑤ ① ④

2^e^ méthode : On procède par disjonction de cas. Compléter le 1^er^ cas et rédiger le 2^e^ cas.

• 1^er^ cas : n est pair

Dans ce cas, on sait que n^2 est aussi un nombre pair.

Or la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

On en déduit que n^2+n est un nombre pair.

• 2^e^ cas : n est impair

Dans ce cas, on sait que n^2 est aussi un nombre impair.

Or la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

On en déduit que n^2+n est un nombre pair.

3^e^ méthode : On procède directement.

On sait que le carré d'un entier a la même parité que cet entier donc n^2 a la même parité que n.

Or la somme de deux entiers de même parité est un entier pair.

On en déduit que n^2+n est un nombre pair.