$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 11 octobre 2019 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : …..

Prénom et nom : ………………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 4°) 1 point + 2 points)

À tout réel *m* on associe la fonction $f_m : x \mapsto -x^2 + x + m$ définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que *m* est un paramètre réel. On peut le remplacer par n'importe quelle valeur.
Par exemple, pour $m = 4$, f_4 a pour expression $f_4(x) = -x^2 + x + 4$.

1°) Dans cette question, on prend $m = 0$. Écrire l'expression de f_0 (« brute », à partir de la formule) [pointillés à gauche] ; en déduire une factorisation immédiate de $f_0(x)$ [pointillés à droite].
On attend deux égalités de la forme « $f_0(x) = ...$ » (ne rien écrire ici).

…………………………………………….   …………………………………………….

2°) Dans cette question, *m* est quelconque.

• Exprimer $f_m(-2)$ en fonction de *m*.

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

• En déduire *m* tel que – 2 soit racine de $f_m(x)$ c'est-à-dire tel que $f_m(-2) = 0$ (1).

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

3°) Dans cette question, *m* est quelconque. Calculer le discriminant Δ_m de $f_m(x)$ en fonction de *m*.
Écrire la réponse ci-dessous et détailler le calcul sur les deux lignes ci-contre.

$\Delta_m =$ .... (un seul résultat sous forme simplifiée)

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de Δ_m et le nombre des racines dans $\mathbb{R}$ du polynôme $f_m(x)$ suivant les valeurs de *m*.

m	$-\infty$ $+\infty$
Signe de Δ_m	
Nombre de racines de $f_m(x)$ dans $\mathbb{R}$	

II. (2 points)

On considère l'expression $P(x) = x(x+2)^2 - (x+1)(x^2 - 1)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
$P(x)$ est-il un polynôme du second degré ? Justifier.

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

III. (1 point)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = x$ (*x* étant un réel quelconque strictement positif) et $AC = 1$.

Exprimer BC en fonction de *x*.

…………………………………………….. (une seule égalité)

IV. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 4 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+\frac{1}{x}=3 \quad (1)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $x^2+(x-1)^2>5 \quad (2)$ et $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4} \quad (3)$.

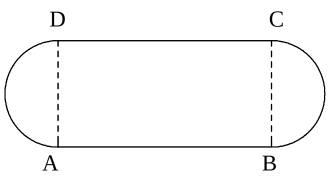
On effectuera la résolution au brouillon et l'on rédigera uniquement deux phrases réponses.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (2 points)

Le schéma ci-contre représente un stade délimité par deux segments $[AB]$ et $[CD]$ et de deux demi-cercles de diamètres $[AD]$ et $[BC]$. (Le schéma n'est pas à l'échelle.)



On précise que ABCD est un rectangle ; $AB=80$ m ; $AD=40$ m.

Calculer le périmètre $\mathscr{P}$ et l'aire $\mathscr{A}$ du stade. On attend uniquement des valeurs exactes.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (1 point)

Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $FG=4$ cm et $\widehat{FEG}=58°$. On note x la longueur EF en cm.

Calculer x (valeur exacte) puis déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie au dixième de x.

……………………………… (une seule égalité) ………………… (une seule réponse sans égalité)

Contrôler le résultat sur une figure au brouillon.

VII. (1 point)

On se place dans le plan P dans lequel une unité de longueur est fixée. On munit P d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé c'est-à-dire tel que les axes soient orthogonaux et que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ aient pour norme 1 (ce que l'on note $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$).

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

Exprimer OM^2 en fonction de x et de y.

$OM^2=$ ……………………………

Compléter la fonction Python dont le script est donné dans l'encadré ci-dessous afin qu'elle renvoie OM^2.

```
def carre_distance_origine(x,y):

    return ..................................
```

Corrigé du contrôle du 11-10-2019

I.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto -x^2 + x + m$ définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que m est un paramètre réel. On peut le remplacer par n'importe quelle valeur.
Par exemple, pour $m = 4$, f_4 a pour expression $f_4(x) = -x^2 + x + 4$.

1°) Dans cette question, on prend $m = 0$. Écrire l'expression de f_0 (« brute », à partir de la formule) [pointillés à gauche] ; en déduire une factorisation immédiate de $f_0(x)$ [pointillés à droite].
On attend deux égalités de la forme « $f_0(x) = ...$ » (ne rien écrire ici).

$f_0(x) = -x^2 + x$ (on n'écrit pas + 0 qui ne sert à rien) $\qquad f_0(x) = x(1-x)$

ou $f_0(x) = -x(x-1)$

On peut écrire $f_0(x) = \left(\sqrt{x} - x\right)\left(\sqrt{x} + x\right)$ pour x positif ou nul (car $f_0(x) = x - x^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 - x^2$).
Il s'agit d'une factorisation valable uniquement pour $x \in \mathbb{R}_+$ et pas pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Il ne s'agit donc pas d'une factorisation polynomiale.

2°) Dans cette question m est quelconque.

• Exprimer $f_m(-2)$ en fonction de m.

$$f_m(-2) = -(-2)^2 - 2 + m$$

$$= -6 + m$$

• En déduire m tel que – 2 soit racine de $f_m(x)$ c'est-à-dire tel que $f_m(-2) = 0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$-6 + m = 0$

$m = 6$

Complément : Pour cette valeur de m, on sait que – 2 est racine de $f_6(x)$. Il est alors possible de trouver l'autre racine très facilement.
En effet, $f_6(x) = -x^2 + x + 6$.

On sait que le produit des racines est égal à $\dfrac{6}{-1} = -6$.

On en déduit que l'autre racine est 3.

3°) Dans cette question, m est quelconque. Calculer le discriminant Δ_m de $f_m(x)$ en fonction de m.
Écrire la réponse ci-dessous et détailler le calcul sur les deux lignes ci-contre.

$\Delta_m = 1 + 4m$ (un seul résultat sous forme simplifiée)

On applique la formule du discriminant « en situation ».

$$\Delta_m = 1^2 - 4 \times (-1) \times m$$

$$= 1 + 4m$$

On s'arrête là. On ne peut pas aller plus loin.
Par raison de priorité, on ne peut pas dire que Δ_m est égal à $5m$.

Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de Δ_m et le nombre des racines dans $\mathbb{R}$ du polynôme $f_m(x)$ suivant les valeurs de m.

Δ_m dépend du paramètre m.

Le signe dépend de m (on n'est pas dans le cas d'un signe constant évident).

La valeur charnière pour m est $-\dfrac{1}{4}$.

m	$-\infty$		$-\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de Δ_m		$-$	0	$+$	
Nombre de racines de $f_m(x)$ dans $\mathbb{R}$		aucune racine dans $\mathbb{R}$	1 racine double dans $\mathbb{R}$	2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$	

II.

On considère l'expression $P(x) = x(x+2)^2 - (x+1)(x^2-1)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
$P(x)$ est-il un polynôme du second degré ? Justifier.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x\left(x^2 + 4x + 4\right) - \left(x^3 - x + x^2 - 1\right)$$

$$= 3x^2 + 5x + 1$$

On reconnaît une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$.

Comme a est non nul, on peut affirmer que $P(x)$ est un polynôme du second degré.

III.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\text{AB} = x$ (x étant un réel quelconque strictement positif) et $\text{AC} = 1$.

Exprimer BC en fonction de x.

$$\text{BC} = \sqrt{x^2+1} \text{ (une seule égalité)}$$

On applique le théorème de Pythagore.

On ne peut pas aller plus loin.

IV.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x + \dfrac{1}{x} = 3 \quad (1)$.

On résout dans $\mathbb{R}^*$.

(1) est successivement équivalente à :

$\dfrac{x^2+1}{x} = 3$

$x^2 + 1 = 3x$ (« produit en croix »)

$x^2 - 3x + 1 = 0$

On considère le polynôme $x^2 - 3x + 1$.

Son discriminant est égal à 5. Comme il est strictement positif, le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (on vérifie à la calculatrice).

Ces deux racines sont non nulles.

L'ensemble des solutions de (1) est donc $S_1 = \left\{ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $x^2 + (x-1)^2 > 5 \quad (2)$ et $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4} \quad (3)$.
On effectuera la résolution au brouillon et l'on rédigera uniquement deux phrases réponses.

(2) est successivement équivalente à :

$x^2 + \left(x^2 - 2x + 1\right) \leqslant 5$

$2x^2 - 2x - 4 \leqslant 0$

$x^2 - x - 2 \leqslant 0$

Considérons le polynôme $x^2 - x - 2$. Les racines sont -1 (racine évidente) ou 2 (obtenue par produit ou somme).
On vérifie à la calculatrice les deux racines.

On applique ensuite la règle du signe d'un polynôme du second degré en faisant éventuellement un tableau de signes.

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$.

On vérifie graphiquement en traçant la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 + (x-1)^2$ sur l'écran de la calculatrice.

(3) est successivement équivalente à :

$x - x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$

$x - x^2 - \dfrac{1}{4} \leqslant 0$

$-\left(x^2 - x + \dfrac{1}{4}\right) \leqslant 0$

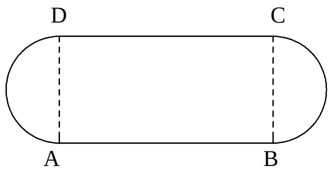
$-\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$

Cette dernière inégalité est toujours vraie.

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 = \mathbb{R}$.

On vérifie graphiquement en traçant la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ sur l'écran de la calculatrice.

V.



Le schéma ci-contre représente un stade délimité par deux segments $[\text{AB}]$ et $[\text{CD}]$ et de deux demi-cercles de diamètres $[\text{AD}]$ et $[\text{BC}]$. (Le schéma n'est pas à l'échelle.)

On précise que ABCD est un rectangle ; $\text{AB} = 80$ m ; $\text{AD} = 40$ m.

Calculer le périmètre $\mathscr{P}$ et l'aire $\mathscr{A}$ du stade. On attend uniquement des valeurs exactes.

On écrit une seule expression.

[$\mathscr{P}$ = somme des longueurs des deux côtés parallèles de 80 m de long + périmètre d'un cercle de diamètre 40 m]

$\mathscr{P} = 2 \times 80 + 40\pi$ m ou $\mathscr{P} = 2 \times (80 \text{ m}) + \pi \times (40 \text{ m})$

$= 160 + 40\pi$ m

[$\mathscr{A}$ = aire d'un rectangle de 80 m de long sur 40 m de large + aire d'un disque de rayon 20 m]

$\mathscr{A} = 80 \times 40 + \pi \times 20^2 \ \text{m}^2$

$= 3200 + 400\pi \ \text{m}^2$

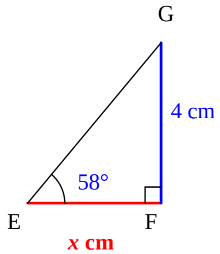
VI.

Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $\text{FG} = 4$ cm et $\widehat{\text{FEG}} = 58°$. On note x la longueur EF en cm.

Calculer x (valeur exacte) puis déterminer à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie au dixième de x.

$x = \dfrac{4}{\tan 58°}$ (une seule égalité) 2,5 (une seule réponse sans égalité)

Contrôler le résultat sur une figure au brouillon.



On fait attention à bien respecter cette disposition pour la figure.

Calculer x (valeur exacte).

Par hypothèse, le triangle EFG est rectangle en F.

Pour l'angle $\widehat{\text{FEG}}$, [EF] est le côté adjacent et [FG] est le côté opposé.

On sait que $\tan \widehat{\text{FEG}} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$ qui s'écrit ici $\tan \widehat{\text{FEG}} = \dfrac{\text{FG}}{\text{FE}}$ soit $\tan 58° = \dfrac{4 \text{ cm}}{x \text{ cm}}$.

Par « produit en croix », on obtient alors $x \times \tan 58° = 4$ d'où $x = \dfrac{4}{\tan 58°}$.

La calculatrice (en mode degré) affiche 2,49947708 (affichage avec neuf chiffres après la virgule).

Toutes les décimales sont exactes sauf peut-être la dernière qui dépend de la suivante. Elle est soit égale à 1 soit égale à 0 car la calculatrice donne toujours un résultat arrondi.

On écrit $x = 2{,}4994770...$ qui signifie que l'on a uniquement le début du développement décimal illimité et que tous les chiffres écrits après la virgule sont exacts.

La valeur arrondie au dixième de x est donc 2,5.

On vérifie la valeur sur la figure.

VII.

On se place dans le plan P dans lequel une unité de longueur est fixée. On munit P d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthonormé c'est-à-dire tel que les axes soient orthogonaux et que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ aient pour norme 1 (ce que l'on note $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$).

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

Exprimer OM^2 en fonction de x et de y.

$$\text{OM}^2 = x^2 + y^2$$

Compléter la fonction Python dont le script est donné dans l'encadré ci-dessous afin qu'elle renvoie OM^2.

```
def carre_distance_origine(x,y):
    return x**2+y**2
```