1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 4 octobre 2019 (50 minutes)

Numéro : ….. Prénom et nom : …………………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère le polynôme $P(x)=(m-1)x^2-mx+m+1$ où m est un réel différent de 1.

Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ en fonction de *m*.
Écrire la réponse ci-dessous et détailler le calcul sur les deux lignes ci-dessous.

$\Delta =$ .... (un seul résultat sous forme simplifiée)

……

……

……

II. (6 points)

On considère les polynômes $P_1(x)=2x^2-x-3$, $P_2(x)=x-x^2-1$, $P_3(x)=1+x^2-2x$ avec $x\in\mathbb{R}$.

Pour chacun des polynômes déterminer :
- déterminer s'il admet des racines dans $\mathbb{R}$ et si oui préciser leurs valeurs ;
- préciser si on peut le factoriser en produit de deux polynômes du premier degré et si oui écrire une factorisation ;
- faire le tableau de signes.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto |x| - \dfrac{1}{x}$. On écrira les trois réponses dans le tableau ci-dessous de gauche à droite.

- Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
- Calculer l'image par *f* de $1-\sqrt{2}$.
- Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par *f*.

…………………………	…………………………	…………………………

IV. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $x^2+(x-1)^2=5 \quad (1)$ et $x(1-x)=\dfrac{1}{4} \quad (2)$.

On effectuera la résolution au brouillon.
Pour chacune des équations, on se contentera de rédiger une phrase selon le modèle ci-dessous :

« L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = ...$ ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (4 points : 1°) 1 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

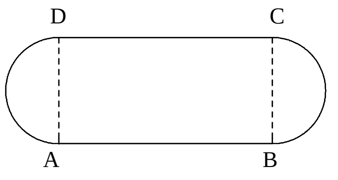
Dans toutes les expressions, x désigne un réel quelconque.
1°) Développer l'expression $\mathrm{A} = (x-5)(7-x) - (2x-3)^2$.
2°) Écrire sous la forme d'un seul quotient l'expression $\mathrm{B} = 2 - \dfrac{1-3x}{x}$ (on suppose dans cette question que $x \neq 0$).
3°) Factoriser les expressions $\mathrm{C} = (x-1)(2x+3) - (x+6)(1-x)$; $\mathrm{D} = (2x-5)^2 - (x-4)^2$.

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une seule égalité (calculs au brouillon).

Réponse du 1°)	
Réponse du 2°)	
Réponses du 3°)	

VI. (2 points)

Le schéma ci-dessous représente une piste d'athlétisme constituée de deux segments $[AB]$ et $[CD]$ et de deux demi-cercles de diamètre $[AD]$ et $[BC]$.
(Le schéma n'est pas à l'échelle.)



On précise que ABCD est un rectangle ; $\mathrm{AB} = 90\ \mathrm{m}$; $\mathrm{AD} = 70\ \mathrm{m}$.

Marc effectue un tour en 2 minutes. On note v sa vitesse moyenne en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{min}^{-1}$.
Déterminer la valeur exacte de v puis déterminer la valeur arrondie au centième.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VII. (1 point)

Soit IJK un triangle rectangle en J tel que $\mathrm{JK} = 3\ \mathrm{cm}$ et $\widehat{\mathrm{JIK}} = 40°$. On note x la longueur IK en cm.

Faire la figure dans l'espace ci-dessous.

Calculer x (valeur exacte).

……………………………… (une seule égalité)

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième de x.

………………… (une seule réponse sans égalité)

VIII. (1 point)

On considère le script ci-contre écrit en langage Python.

```
nombre1 = float(input("nombre 1 : "))
nombre2 = float(input("nombre 2 : "))
moyenne = (nombre1 + nombre2) / 2
print(moyenne)
```

En exécutant le script pour deux nombres saisis en entrée dont l'un est égal à – 8, on a obtenu – 3 comme affichage en sortie.
Quel est le deuxième nombre saisi en entrée ?

…………… (une seule réponse sans égalité)

Corrigé du contrôle du 4-10-2019

I.

On considère le polynôme $P(x)=(m-1)x^2-mx+m+1$ où m est un réel différent de 1.

Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ en fonction de *m*.
Écrire la réponse ci-dessous et détailler le calcul sur les deux lignes ci-dessous.

$\Delta=4-3m^2$ (un seul résultat sous forme simplifiée)

Lorsque l'on regarde l'expression de $P(x)$, on constate qu'il s'agit d'une expression de la forme ax^2+bx+c avec $a=m-1$, $b=-m$, $c=m+1$.

Le réel *m* est un paramètre. Les paramètre *a*, *b*, *c* dépendent du paramètre *m*.

$P(x)$ est un polynôme du second degré puisque comme $m\neq 1$ par hypothèse, $m-1\neq 0$.

On applique directement la formule du cours donnant le discriminant d'un polynôme du second degré.
La formule est appliquée en situation.

$$\begin{aligned}\Delta&=(-m)^2-4(m-1)(m+1)\\&=m^2-4(m^2-1) \quad \text{(identité remarquable)}\\&=4-3m^2\end{aligned}$$

II.

On considère les polynômes $P_1(x)=2x^2-x-3$, $P_2(x)=x-x^2-1$, $P_3(x)=1+x^2-2x$ avec $x\in\mathbb{R}$.

Pour chacun des polynômes déterminer :
- déterminer s'il admet des racines dans $\mathbb{R}$ et si oui préciser leurs valeurs ;
- préciser si on peut le factoriser en produit de deux polynômes du premier degré et si oui écrire une factorisation ;
- faire le tableau de signes.

• $P_1(x)=2x^2-x-3$

On constate que $P_1(-1)=0$ donc -1 est racine du polynôme.
$P_1(x)$ admet donc une autre racine α distincte ou confondue.
On sait que $-1\times\alpha$ est égal à $-\frac{3}{2}$ ce qui donne $-\alpha=-\frac{3}{2}$ soit $\alpha=\frac{3}{2}$.

Les racines de $P_1(x)$ sont donc -1 et $\frac{3}{2}$ (application qui permet de résoudre des équations polynomiales).

On vérifie ce résultat grâce à la calculatrice grâce à l'application permettant de résoudre les équations polynomiales.

D'après la règle de factorisation des polynômes du second degré : $P_1(x)=2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ou encore $P_1(x)=(x+1)(2x-3)$.

On vérifie aisément ce résultat en développant l'expression factorisée.

Si on calcule le discriminant, on trouve $\Delta_1=25$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $P_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On vérifie en traçant la courbe représentative sur l'écran de la calculatrice et en prenant des valeurs tests.

• $P_2(x)=x-x^2-1$

On commence par écrire $P_2(x)$ sous forme développée réduite et ordonnée : $P_2(x)=-x^2+x-1$.

On ne trouve pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta_2&=1^2-4\times(-1)\times(-1)\\&=1-4\\&=-3\end{aligned}$$

$\Delta_2<0$ donc $P_2(x)=x-x^2-1$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

On ne peut pas factoriser $P_2(x)=x-x^2-1$ en produit de deux polynômes du premier degré.

D'après la règle du signe d'un polynôme du second degré, $P_2(x)$ est toujours du signe du coefficient de x^2 dans l'écriture développée réduite c'est-à-dire négatif.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $P_2(x)$		$-$	

Il n'y a aucune valeur sur la ligne des *x*.

On vérifie en traçant la courbe représentative sur l'écran de la calculatrice et en prenant des valeurs tests.

• $P_3(x)=1+x^2-2x$

On commence par écrire $P_3(x)$ sous forme développée réduite et ordonnée : $P_3(x)=x^2-2x+1$.

On observe qu'il s'agit du développement d'une identité remarquable.

$P_3(x)=(x-1)^2$

Donc $P_3(x)$ admet 1 pour racine double.

La forme factorisée est donnée par $P_3(x)=(x-1)^2$.

On peut dresser immédiatement le tableau de signes de $P_3(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $P_3(x)$		+	0	+	

On vérifie en traçant la courbe représentative sur l'écran de la calculatrice et en prenant des valeurs tests.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto |\,x\,| - \dfrac{1}{x}$. On écrira les trois réponses dans le tableau ci-dessous de gauche à droite.

- Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
- Calculer l'image par *f* de $1-\sqrt{2}$.
- Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par *f*.

$\mathbb{R}^*$	$2\sqrt{2}$	1

$f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$.

L'ensemble de définition de définition de *f* est donc $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ que l'on note $\mathbb{R}^*$.

On peut écrire $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ (égalité d'ensembles).

$$f\left(1-\sqrt{2}\right)=\left|\,1-\sqrt{2}\,\right|-\frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\sqrt{2}-1+\frac{1\times\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$=\sqrt{2}-1+\frac{\sqrt{2}+1}{1} \quad \text{(identité remarquable au dénominateur)}$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1$$

$$=2\sqrt{2}$$

Pour déterminer les antécédents de 0 par *f*, on doit résoudre l'équation $f(x)=0$ soit $|\,x\,|-\dfrac{1}{x}=0 \quad (1)$.

On se place dans $\mathbb{R}^*$.

(1) équivaut à $x|\,x\,|=1$.

Il y a deux cas selon le signe de *x*.

1^er^ cas : $x>0$

(1) est successivement équivalente à :

$x^2=1$

$x=1$ ou $x=-1$ (impossible car $x>0$ dans ce 1^er^ cas)

2^e^ cas : $x<0$

(1) est successivement équivalente à :

$-x^2=1$

$x^2=-1$ (impossible dans $\mathbb{R}$)

Le seul antécédent de 0 par *f* est donc 1.

On vérifie aisément ce résultat en traçant la courbe représentative de *f* sur l'écran de la calculatrice.

IV.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $x^2+(x-1)^2=5 \quad (1)$ et $x(1-x)=\dfrac{1}{4} \quad (2)$.

On effectuera la résolution au brouillon.
Pour chacune des équations, on se contentera de rédiger une phrase selon le modèle ci-dessous :
« L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=$.......... ».

(1) est successivement équivalente à :

$x^2+\left(x^2-2x+1\right)=5$

$2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0$

$x=-1$ (racine évidente) ou $x=2$ (obtenue par produit ou somme)

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=\{-1\,;2\}$

(2) est successivement équivalente à :

$x-x^2=\dfrac{1}{4}$

$x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

$x=\dfrac{1}{2}$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

V.

Dans toutes les expressions, x désigne un réel quelconque.

1°) Développer l'expression $A=(x-5)(7-x)-(2x-3)^2$.

2°) Écrire sous la forme d'un seul quotient l'expression $B=2-\dfrac{1-3x}{x}$ (on suppose dans cette question que $x\neq 0$).

3°) Factoriser les expressions $C=(x-1)(2x+3)-(x+6)(1-x)$; $D=(2x-5)^2-(x-4)^2$.

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une seule égalité (calculs au brouillon).

Réponse du 1°)	$A=-5x^2+24x-44$
Réponse du 2°)	$B=\dfrac{5x-1}{x}$
Réponses du 3°)	$C=3(x-1)(x+3)$
	$D=3(x-1)(x-3)$

$A=7x-x^2-35+5x-(4x^2-12x+9)$

$=12x-x^2-35-4x^2+12x-9$

$=-5x^2+24x-44$

On vérifie éventuellement en utilisant quelques valeurs tests simples.

$B=2-\dfrac{1-3x}{x}$

$=\dfrac{2x-(1-3x)}{x}$ (attention aux parenthèses)

$=\dfrac{5x-1}{x}$

$C=(x-1)(2x+3)+(x+6)(x-1)$ (phase de réécriture importante)

$=(x-1)[(2x+3)+(x+6)]$

$=(x-1)(3x+9)$

$=3(x-1)(x+3)$

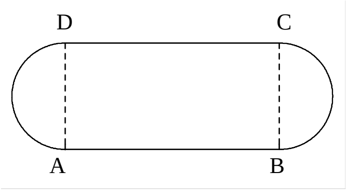
$D=[(2x-5)+(x-4)][(2x-5)-(x-4)]$ (identité remarquable)

$=(3x-9)(x-1)$

$=3(x-3)(x-1)$

VI.

Le schéma ci-dessous représente une piste d'athlétisme constituée de deux segments $[AB]$ et $[CD]$ et de deux demi-cercles de diamètre $[AD]$ et $[BC]$.
(Le schéma n'est pas à l'échelle.)



On précise que ABCD est un rectangle ; $AB=90$ m ; $AD=70$ m.

Marc effectue un tour en 2 minutes. On note v sa vitesse moyenne en $\text{m}\cdot\text{min}^{-1}$.
Déterminer la valeur exacte de v puis déterminer la valeur arrondie au centième.

On calcule le périmètre du stade que l'on note L.

$L=2\times 90+70\pi$

$\downarrow$

Formule du périmètre d'un cercle de diamètre d : $\pi\times d$.

$L=180+70\pi$

On applique la formule donnant la vitesse moyenne.

$v=\dfrac{180+70\pi}{2}$

$v=90+35\pi\ \text{m}\cdot\text{min}^{-1}$

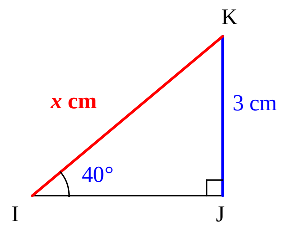
Avec la calculatrice, on obtient l'affichage 199,9557429.

La valeur arrondie au centième de v est 199,96.

VII.

Soit IJK un triangle rectangle en J tel que $\text{JK}=3\text{ cm}$ et $\widehat{\text{JIK}}=40°$. On note x la longueur IK en cm.

Faire la figure dans l'espace ci-dessous.



On fait attention à bien respecter cette disposition pour la figure.

Calculer x (valeur exacte).

$x=\dfrac{3}{\sin 40°}$ (une seule égalité)

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième de x.

4,7 (une seule réponse sans égalité)

Par hypothèse, le triangle IJK est rectangle en J.

$[\text{IK}]$ est l'hypoténuse.

Pour l'angle $\widehat{\text{JIK}}$, $[\text{JK}]$ est le côté opposé.

On sait que $\sin\widehat{\text{JIK}}=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ qui s'écrit ici $\sin\widehat{\text{JIK}}=\dfrac{\text{JK}}{\text{IK}}$ soit $\sin 40°=\dfrac{3\text{ cm}}{x\text{ cm}}$.

Par « produit en croix », on obtient alors $x\times\sin 40°=3$ d'où $x=\dfrac{4}{\sin 40°}$.

La calculatrice (en mode degré) affiche 4,667171481 (affichage avec neuf chiffres après la virgule).

Toutes les décimales sont exactes sauf peut-être la dernière qui dépend de la suivante. Elle est soit égale à 1 soit égale à 0 car la calculatrice donne toujours un résultat arrondi.

On écrit $x=4,66717148...$ qui signifie que l'on a uniquement le début du développement décimal illimité et que tous les chiffres écrits après la virgule sont exacts.

La valeur arrondie au dixième de x est donc 4,7.

On vérifie la valeur sur la figure.

VIII.

On considère le script ci-contre écrit en langage Python.

```
nombre1 = float(input("nombre 1 : "))
nombre2 = float(input("nombre 2 : "))
moyenne = (nombre1 + nombre2) / 2
print(moyenne)
```

En exécutant le script pour deux nombres saisis en entrée dont l'un est égal à – 8, on a obtenu – 3 comme affichage en sortie.
Quel est le deuxième nombre saisi en entrée ?

2 (une seule réponse sans égalité)

On résout l'équation : $\dfrac{x-8}{2}=-3$.
Cette équation est successivement équivalente à :

$x-8=-6$ (produit en croix)

$x=2$