$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Devoir pour le lundi 7 octobre 2019

Le devoir doit être rédigé sur une copie simple recto-verso.

On veillera à applique les formules en situation sans introduire de nouvelles notations.

I. 1°) Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 3$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)^3 = (x^2 - 2x - 3)^2$.

Pour les deux questions, vérifier les résultats à l'aide des outils dont on dispose (site Internet « dcode », application « photomaths » sur téléphone portable qui a l'avantage de donner toutes les étapes de calcul ou de résolution, logiciel de calcul formel…).

II.

Soit m un réel. On considère l'équation $(x-1)^2 + (x+1)^2 = m$ (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1°) Dans cette question, on choisit $m = 6$. Résoudre l'équation (E) dans ce cas.

2°) Dans cette question, on revient au cas où m est un réel quelconque.
Résoudre (E). On discutera suivant les valeurs de m.

Corrigé du devoir pour le 7-10-2019

I.

1°) $P(x) = x^2 - 2x - 3$

On constate que $P(-1) = 0$ donc – 1 est racine du polynôme.
$P(x)$ admet donc une autre racine α distincte ou confondue.
On sait que $-1 \times \alpha$ est égal à – 3 ce qui donne $-\alpha = -3$ soit $\alpha = 3$.
Les racines de $P(x)$ sont donc – 1 et 3.
D'après la règle de factorisation des polynômes du second degré : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (x+1)(x-3)$.
On vérifie aisément ce résultat.

2°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)^3 = \left(x^2 - 2x - 3\right)^2$ (1).

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$(x+1)^3 = (x+1)^2 (x-3)^2$

$(x+1)^3 - (x+1)^2 (x-3)^2 = 0$

$(x+1)^2 \left[(x+1) - (x-3)^2\right] = 0$

$(x+1)^2 \left(-x^2 + 7x - 8\right) = 0$

$(x+1)^2 = 0$ ou $-x^2 + 7x - 8 = 0$

$x = -1$ ou $x^2 - 7x + 8 = 0$

On considère le polynôme $x^2 - 7x + 8$.

Calcul du discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-7)^2 - 4 \times 1 \times 8 \\ &= 49 - 32 \\ &= 17\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$.

L'ensemble des solutions de (1) est $S = \left\{-1 \,;\, \dfrac{7-\sqrt{17}}{2} \,;\, \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

II.

1°)

Pour $m=6$, (E) s'écrit $(x-1)^2+(x+1)^2=6$.

L'équation est successivement équivalente à :

$2x^2+2=6$

$2x^2=4$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

L'ensemble des solutions de (E) pour $m=6$ est $S=\left\{\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right\}$.

2°)

L'équation (E) est successivement équivalente à :

$2x^2+2=m$

$x^2=\dfrac{m-2}{2}$

Comme m est un réel, $\dfrac{m-2}{2}$ est aussi un réel. Il faut discuter suivant son signe qui ne dépend que de celui de $m-2$.

On se réfère à la propriété du cours sur la résolution de l'équation $x^2=a$ où a est un réel.

On effectue donc une discussion en distinguant trois cas selon que $m>2$, $m=2$, $m<2$.

- Si $m>2$, alors $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{m-2}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{m-2}{2}}$ (2 solutions réelles opposées).

- Si $m=2$, alors $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x=0$.

- Si $m<2$, alors (E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ (le carré d'un réel est toujours positif).