1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 20 septembre 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………..…………

Note : ….. / 20

I. (1 point)

On considère un cercle de rayon R. On note L la longueur d'un arc de ce cercle intercepté par un angle au centre de mesure x radians.
Exprimer x en fonction L et de R. On attend une justification succincte.

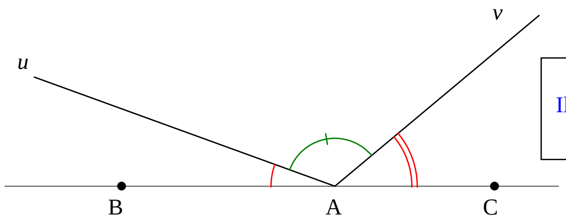
…………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………..………………………………………………

II. (2 points)

On considère la figure ci-dessous où A, B, C sont trois points distincts alignés tels que A soit situé entre B et C.
On suppose que les mesures respectives en radians des angles $\widehat{\text{BA}u}$, $\widehat{u\text{A}v}$, $\widehat{\text{CA}v}$ sont x, $\dfrac{2\pi}{3}$, $2x$ où x est un réel.



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

Calculer x.

…………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………..………………………………………………

III. (1 point)

On considère la fonction écrite ci-dessous en langage naturel dans le cadre de gauche dont le script correspondant en langage Python est donné dans le cadre de droite.

Fonction aire (r)
Renvoyer πr^2

```
def aire(r) :
    return pi*r**2
```

Cette fonction renvoie l'aire d'une figure plane usuelle. Quelle est cette figure ?
On complètera directement la phrase ci-dessous. Une réponse imprécise ou incomplète ne sera pas prise en compte.

Cette fonction renvoie ……………………………………………………………..…………………………… .

IV. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Dans toutes les expressions, x désigne un réel quelconque.
1°) Développer les expressions suivantes : $\text{A} = x(x-1)(x+2)$; $\text{B} = (x-1)x(x+1)$; $\text{C} = (x+3)(2x-1)(x-5)$.

2°) Écrire sous la forme d'un seul quotient l'expression $\text{D} = 1 - \dfrac{2x-1}{x}$ (on suppose dans cette question que x est non nul).

3°) Factoriser les expressions $\text{E} = 4(x-1)^2 - 1$ et $\text{F} = (x-2)^2 + (2-x)(2x-1)$.

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une seule égalité (calculs au brouillon).

Réponses du 1°)	
Réponse du 2°)	
Réponses du 3°)	

V. (6 points : 1 point par forme canonique)

Compléter la colonne de droite du tableau au verso en écrivant la forme canonique du polynôme du second degré donné dans la colonne de gauche. On attend chaque fois une <u>égalité</u> ($\text{A} = \ldots\ldots$, $\text{B} = \ldots\ldots$, $\text{C} = \ldots\ldots$ etc.).

$A=x^2+2x-5$	
$B=2x-x^2$	
$C=x^2+x$	
$D=x^2+\frac{x}{2}-1$	
$E=2x^2-4x+3$	
$F=\left(x\sqrt{3}-1\right)^2-2x^2$	

On n'oubliera pas d'effectuer les vérifications utiles.

Écrire le détail des calculs sur les lignes ci-dessous pour deux expressions au choix.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1-|x|}$.

Calculer $f\left(-\sqrt{2}\right)$. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible, sans racine carrée au dénominateur.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

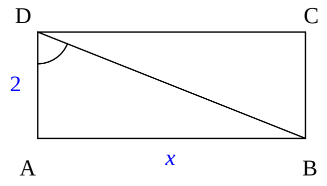
……………………………………………………………………………………………………

VII. (3 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 1 point)

Une unité de longueur est fixée dans le plan. On considère un rectangle ABCD tel que $AB=x$ et $AD=2$.

Les questions 1°) et 2°) sont indépendantes.

1°) a) Exprimer $\tan\widehat{ADB}$ en fonction de x.



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

b) Dans cette question, on suppose que $x=3$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ADB}$.

………………… (une seule réponse <u>sans égalité</u>)

2°) On revient au cas où x est un réel quelconque.
Exprimer AC^2 en fonction de x. On attend une réponse de la forme $AC^2=\ldots$.

……………………………… (une seule <u>égalité</u>)

Corrigé du contrôle du 20-9-2019

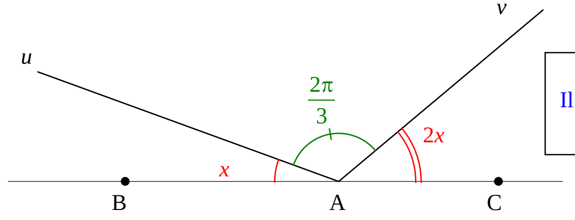
I.

On considère un cercle de rayon R. On note L la longueur d'un arc de ce cercle intercepté par un angle au centre de mesure x radians.
Exprimer x en fonction L et de R. On attend une justification succincte.

On sait que $L = R \times x$ (formule du cours) donc $x = \dfrac{L}{R}$.

II.

On considère la figure ci-dessous où A, B, C sont trois points distincts alignés tels que A soit situé entre B et C.
On suppose que les mesures respectives en radians des angles $\widehat{\text{BA}u}$, $\widehat{u\text{A}v}$, $\widehat{\text{CA}v}$ sont x, $\dfrac{2\pi}{3}$, $2x$ où x est un réel.



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

Calculer x.

On a $\widehat{\text{BA}u} + \widehat{u\text{A}v} + \widehat{\text{CA}v} = \widehat{\text{BAC}}$.

Comme les points B, A, C sont alignés dans cet ordre, l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ est plat donc $\widehat{\text{BAC}} = \pi$.

On peut donc écrire $x + \dfrac{2\pi}{3} + 2x = \pi$.

Cette égalité est successivement équivalente à :

$$3x = \pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$3x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{3}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{9}$$

Il s'agit d'une équation que l'on résout.
On travaille uniquement avec le radian sans repasser par le degré.
Il est possible d'utiliser la commande π de la calculatrice.

III.

On considère la fonction écrite ci-dessous en langage naturel dans le cadre de gauche dont le script correspondant en langage Python est donné dans le cadre de droite.

Fonction **aire**(r) Renvoyer πr^2	def **aire**(r) : return pi*r**2

Cette fonction renvoie l'aire d'une figure plane usuelle. Quelle est cette figure ?
On complètera directement la phrase ci-dessous. Une réponse imprécise ou incomplète ne sera pas prise en compte.

Cette fonction renvoie l'aire d'un disque de rayon donné correspondant à la variable r.

Quelle est la différence entre cercle et disque ?

Définition :
Soit O un point fixé du plan et R un réel strictement positif fixé.

- Le **cercle** $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R du point O.

- Le **disque fermé** $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points situés à une distance inférieure ou égale à R du point O.

Soit M un point quelconque du plan.

$\text{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \text{OM} = R$

$\text{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \text{OM} \leqslant R$

Le disque $\mathcal{D}$ est la partie du plan limité par le cercle $\mathcal{C}$.

Le cercle $\mathcal{C}$ est le bord ou la frontière du disque fermé $\mathcal{D}$.

Un cercle a un périmètre. Un disque a une aire.

On retrouve la même distinction dans l'espace entre une sphère et une boule.

IV.

Dans toutes les expressions, x désigne un réel quelconque.

1°) Développer les expressions suivantes : $A = x(x-1)(x+2)$; $B = (x-1)x(x+1)$; $C = (x+3)(2x-1)(x-5)$.

2°) Écrire sous la forme d'un seul quotient l'expression $D = \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2 - \dfrac{1}{x^2}$ (on suppose dans cette question que x est non nul).

3°) Factoriser les expressions $E = 4(x-1)^2 - 1$ et $F = (x-2)^2 + (2-x)(2x-1)$.

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une seule égalité (calculs au brouillon).

Réponses du 1°)	$A = x^3 + x^2 - 2x$
	$B = x^3 - x$
	$C = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$
Réponse du 2°)	$D = \dfrac{5}{4x^2}$
Réponses du 3°)	$E = (2x-1)(2x-3)$
	$F = (x-2)(-x-1)$

1°) Pour le développement de l'expression B, on regroupe astucieusement les facteurs $x-1$ et $x+1$ de manière à former une identité remarquable.

$A = x(x^2 + x - 2)$

$= x^3 + x^2 - 2x$

$B = x(x^2 - 1)$

$= x^3 - x$

$C = (x+3)(2x^2 - 11x + 5)$

$= 2x^3 - 11x^2 + 5x + 6x^2 - 33x + 15$

$= 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$

On obtient des expressions polynomiales de degré 3.

2°)

$D = \left(\dfrac{3}{2x}\right)^2 - \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{9}{4x^2} - \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{9-4}{4x^2}$

$= \dfrac{5}{4x^2}$

3°)

$E = [2(x-1)]^2 - 1^2$ (phase de réécriture importante)

$= [2(x-1)+1][2(x-1)-1]$

$= (2x-2+1)(2x-2-1)$

$= (2x-1)(2x-3)$

$F = (x-2)(x-2) - (x-2)(2x-1)$

$= (x-2)[(x-2) - (2x-1)]$

$= (x-2)(-x-1)$

On peut aussi écrire $F = (2-x)(x+1)$.

V.

Compléter la colonne de droite du tableau au verso en écrivant la forme canonique du polynôme du second degré donné dans la colonne de gauche. On attend chaque fois une égalité (A = ..., B = ..., C = ... etc.).

$A = x^2 + 2x - 5$	$A = (x+1)^2 - 6$
$B = 2x - x^2$	$B = 1 - (x-1)^2$
$C = x^2 + x$	$C = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$
$D = x^2 + \dfrac{x}{2} - 1$	$D = \left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{17}{16}$
$E = 2x^2 - 4x + 3$	$E = 2(x-1)^2 + 1$
$F = (x\sqrt{3} - 1)^2 - 2x^2$	$F = (x - \sqrt{3})^2 - 2$

On n'oubliera pas d'effectuer les vérifications utiles.

Écrire le détail des calculs sur les lignes ci-dessous pour deux expressions au choix.

$\mathrm{A}=x^2+2x+1-6$ $=(x+1)^2-6$	$\mathrm{B}=-\left(x^2-2x\right)$ $=-\left(x^2-2x+1-1\right)$ $=-\left[(x-1)^2-1\right]$ $=1-(x-1)^2$	$\mathrm{C}=x^2+x$ $=\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$ $=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
$\mathrm{D}=x^2+\frac{x}{2}-1$ $=\left(x^2+2\times x\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}-1$ $=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{16}$	$\mathrm{E}=2\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)$ $=2\left[\left(x^2-2x+1\right)-1+\frac{3}{2}\right]$ $=2\left[(x-1)^2+\frac{1}{2}\right]$ $=2(x-1)^2+1$	Pour F, il faut commencer par développer toute l'expression. $\mathrm{F}=\left(x\sqrt{3}-1\right)^2-2x^2$ $=3x^2-2x\sqrt{3}+1-2x^2$ $=x^2-2x\sqrt{3}+1$ $=\left(x-\sqrt{3}\right)^2-2$

On vérifie en développant les formes canoniques obtenues.

On teste également pour des valeurs particulières de x.

Pour toutes, on peut utiliser $x=0$ (calcul mental extrêmement simple).
Pour A, on peut utiliser $x=-1$; pour B, on peut utiliser $x=1$ etc.

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{1-|x|}$.

Calculer $f\left(-\sqrt{2}\right)$. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible, sans racine carrée au dénominateur.

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^3}{1-\left|-\sqrt{2}\right|}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\times\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{1}$$

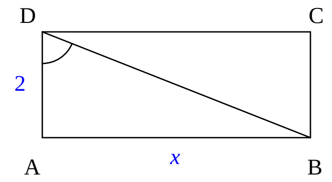
$$=4+2\sqrt{2}$$

VII.

Une unité de longueur est fixée dans le plan. On considère un rectangle ABCD tel que $\mathrm{AB}=x$ et $\mathrm{AD}=2$.

Les questions 1°) et 2°) sont indépendantes.

1°) a) Exprimer $\tan\widehat{\mathrm{ADB}}$ en fonction de x.



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

On peut éventuellement faire une figure avec uniquement le triangle ABD rectangle en A.

Comme ABCD est un rectangle, tous ses angles sont droits donc le triangle ABD est rectangle en A.

On a donc $\tan\widehat{\mathrm{ADB}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$ d'où $\tan\widehat{\mathrm{ADB}}=\dfrac{x}{2}$.

b) Dans cette question, on suppose que $x=3$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{ADB}}$.

56,3 (une seule réponse <u>sans égalité</u>)

On a $\tan\widehat{\text{ADB}} = \dfrac{3}{2}$. On utilise la calculatrice en mode degré.
On n'écrit aucune unité.
On vérifie éventuellement en faisant une figure en respectant les dimensions.

2°) On revient au cas où x est un réel quelconque.
Exprimer AC^2 en fonction de x. On attend une réponse de la forme $\text{AC}^2 = \dots$.

$$\text{AC}^2 = 4 + x^2 \text{ (une seule \underline{égalité})}$$

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B.

On peut éventuellement faire une figure avec uniquement le triangle ABC.