1$^{\text{ère}}$ 6
spécialité

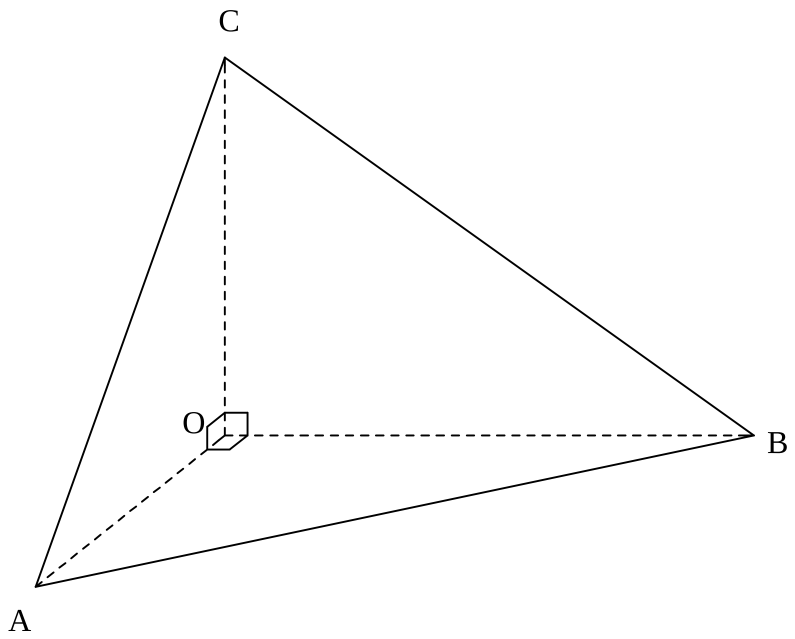
Devoir pour le lundi 9 septembre 2019

Le devoir doit être rédigé sur une copie simple recto-verso.

Dans les deux exercices, une unité de longueur est fixée dans l'espace.

I. On considère un tétraèdre OABC trirectangle en O.
On pose $a = \text{OA}$, $b = \text{OB}$, $c = \text{OC}$.

Exprimer le volume de V de OABC en fonction de a, b, c.



II. On considère un cube ABCDEFGH d'arête a, a étant un réel strictement positif.
Exprimer en fonction de a l'aire S de la sphère circonscrite et V le volume de la boule associée.

Conseils :

● On attachera le plus grand soin :

- à la rédaction qui doit être précise et concise ;
- à la présentation des calculs.

● On veillera à toujours appliquer les formules en situation. En particulier, on prendra soin de ne pas utiliser de lettres qui n'auraient pas été introduites auparavant.

● On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

Corrigé

On rappelle que pour les barres de fractions assez longues, on doit utiliser la règle.

I.

Un tétraèdre est une pyramide particulière.

On sait que le volume d'une pyramide est donné par la formule $\dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

On peut prendre pour base le triangle OAB (ou OBC ou encore OAC au choix).

$$V = \frac{\mathscr{A}_{\text{AOB}} \times \text{OC}}{3}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{OA} \times \text{OB}}{2} \times \text{OC}}{3}$$

$$= \frac{\text{OA} \times \text{OB} \times \text{OC}}{6}$$

$$= \frac{a \times b \times c}{6}$$

Vérification : On effectue une analyse dimensionnelle rapide.

II.

Par définition, la sphère circonscrite au cube est la sphère passant par tous les sommets du cube (cf. définition de la sphère circonscrite à un pavé droit dans l'espace).

On peut faire une représentation en perspective cavalière en veillant à respecter les conventions pour les arêtes cachées (pointillés obligatoires).
On peut éventuellement regarder sur Internet en prenant garde que l'on trouve parfois des figures très maladroites.

La sphère circonscrite au cube ABCDEFGH a pour diamètre les segments définissant les grandes diagonales.

Elle a donc pour centre le milieu de ces segments c'est-à-dire le centre du cube.

On sait que les grandes diagonales ont pour longueur $a\sqrt{3}$ (résultat qui se démontre à l'aide du théorème de Pythagore).

La sphère circonscrite au cube a donc pour rayon $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

● Calcul de l'aire *S* de la sphère :

$S = 4\pi \times R^2$

$= 4\pi \times \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{\cancel{4}\pi \times 3a^2}{\cancel{4}}$ (on utilise les propriétés des puissances ; on doit donner le résultat sous la forme la plus simple possible)

$= 3\pi a^2$

L'aire de la sphère est égale à $3\pi a^2$.

Vérification : On effectue une analyse dimensionnelle rapide.

● Calcul du volume *V* de la boule :

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

$= \dfrac{4}{3}\pi \times \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= \dfrac{4\pi \times \cancel{3}a^3 \times \sqrt{3}}{8 \times \cancel{3}}$

$= \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$

Le volume de la boule est égal à $\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$.

Vérification : On effectue une analyse dimensionnelle rapide.