1ère S2

Contrôle du mardi 4 juin 2019 (50 minutes)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer et hachurer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M de *P* dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient l'inégalité $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

……..……………………………………………………………………………………………………

……..……………………………………………………………………………………………………

2°) Calculer $\mathscr{A}$ l'aire de $\mathscr{D}$. On attend la valeur exacte.

……..

II. (1 point)

Quel est l'ensemble des réels de l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$ dont le sinus est strictement négatif ?

……………………………………………………

III. (2 points)

On pose $\mathrm{A} = 2 - \cos x - \cos^2 \dfrac{x}{2}$ où x est un réel quelconque.

Démontrer que $\mathrm{A} = 3\sin^2 \dfrac{x}{2}$.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

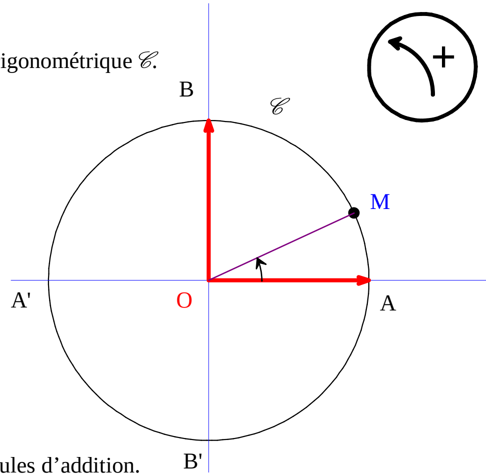
……..

IV. **(2 points)**

1°) Soit x un réel quelconque. On note M son image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Placer le point N associé à $x + \dfrac{\pi}{2}$.

Donner les formules du cosinus et du sinus de $x + \dfrac{\pi}{2}$ déduites par lecture graphique.



……………………………………………………

……………………………………………………

2°) Retrouver l'un de ces deux formules au choix à l'aide des formules d'addition.

……..

……..

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On donne les expressions $\text{A}=2-(\cos x-\sin x)^2$ et $\text{B}=4\sin^2 x\cos^2 x$ où x est un réel quelconque.

1°) Développer A puis exprimer A en fonction du cosinus ou du sinus de $2x$.

………

………

………

………

2°) Justifier que $\text{B}=\sin^2 2x$; en déduire une linéarisation de B.

………

………

………

………

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Compléter la phrase :

Les réels dont le cosinus est égal à 0 sont les réels de la forme………………………………………………………

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 5x=0 \quad (1)$.

………

………

………

………

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=a$ où a est un réel quelconque fixé et la relation de récurrence $u_{n+1}=2(u_n)^2-1$ pour tout entier naturel n.

1°) On suppose que $u_p=1$ pour un entier naturel p. Que vaut alors u_{p+1} ?

………

………

2°) On suppose dans cette question que $a=0$. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$.

• Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ? Répondre avec précision en justifiant brièvement à l'aide du résultat de la question 1°).

………

………

• Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 au brouillon.
Exprimer S_n en fonction de n pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

………

………

………

………

VIII. (1 point)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(x+\sqrt{2}\right)^2=(x+3)(x-1)+7 \quad (\text{E})$.

Écrire l'ensemble des solutions S sur la ligne ci-dessous.

……………………..

Corrigé du contrôle du 4-6-2019

I.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer et hachurer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M de P dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient l'inégalité $x^2+y^2 \leqslant 9$.

$\mathscr{D}$ est le disque fermé de centre O et de rayon 3.

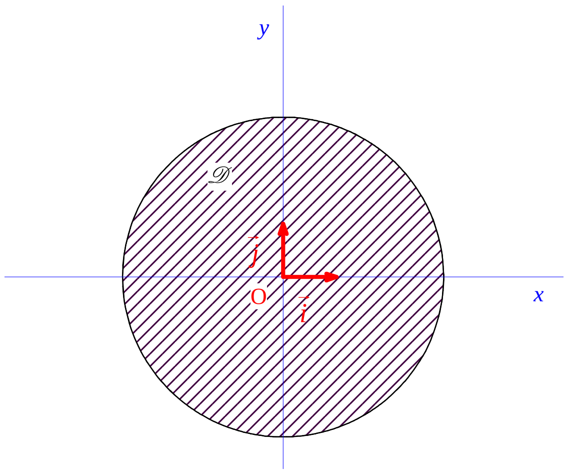
On peut justifier de la manière suivante.

Soit M un point quelconque du plan P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

On sait que $\text{OM}^2 = x^2+y^2$ car le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthonormé.

$\text{M} \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \text{OM}^2 \leqslant 9$

$\Leftrightarrow \text{OM} \leqslant 3$



2°) Calculer $\mathscr{A}$ l'aire de $\mathscr{D}$. On attend la valeur exacte.

$\mathscr{A} = \pi \times 3^2 = 9\pi$

II.

Quel est l'ensemble des réels de l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$ dont le sinus est strictement négatif ?

$$]-\pi\,;\,0[\,\cup\,]\pi\,;\,2\pi[$$

On utilise un cercle trigonométrique.

III.

On pose $\text{A} = 2-\cos x-\cos^2\dfrac{x}{2}$ où x est un réel quelconque.

Démontrer que $\text{A} = 3\sin^2\dfrac{x}{2}$.

$$\text{A} = 1+1-\cos x-\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= 1+2\sin^2\frac{x}{2}-\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

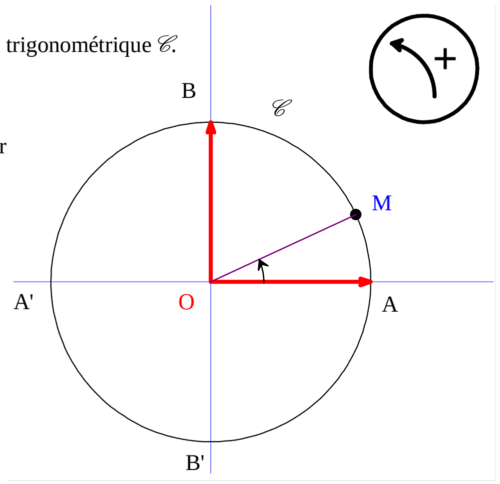
$$= 3\sin^2\frac{x}{2}$$

IV.

1°) Soit x un réel quelconque. On note M son image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

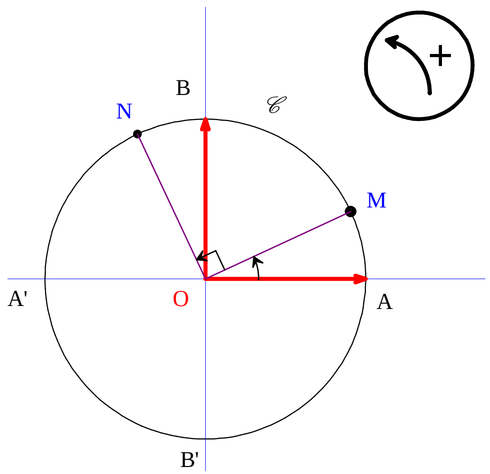
Placer le point N associé à $x+\dfrac{\pi}{2}$.

Donner les formules du cosinus et du sinus de $x+\dfrac{\pi}{2}$ déduites par lecture graphique.



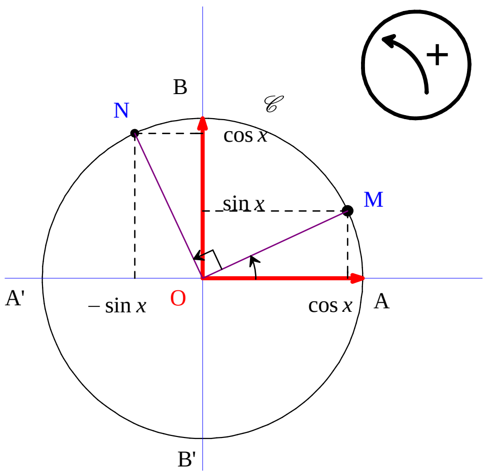
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$



On trace le segment $[\mathrm{ON}]$ et on marque l'angle droit direct $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}})$ (angle orienté dont une mesure en radians est $\frac{\pi}{2}$).

La figure devrait être complétée par les segments en pointillés suivants :



2°) Retrouver l'un de ces deux formules au choix à l'aide des formules d'addition.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\times\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\times\sin\frac{\pi}{2}$$ (formule d'addition du cosinus)

$$=\cos x\times 0-\sin x\times 1$$

$$=-\sin x$$

V.

On donne les expressions $\mathrm{A}=2-(\cos x-\sin x)^2$ et $\mathrm{B}=4\sin^2 x\cos^2 x$ où x est un réel quelconque.

1°) Développer A puis exprimer A en fonction du cosinus ou du sinus de $2x$.

$$\mathrm{A}=2-\left(\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x\right)$$

$$=2-(1-2\cos x\sin x)$$

$$=1+2\cos x\sin x$$

$$=1+\sin 2x$$

2°) Justifier que $\mathrm{B}=\sin^2 2x$; en déduire une linéarisation de B.

$$\mathrm{B}=(2\sin x\cos x)^2$$

$$=(\sin 2x)^2$$

$$=\sin^2 2x$$

$$=\frac{1-\cos 4x}{2}$$

VI.

1°) Compléter la phrase :

Les réels dont le cosinus est égal à 0 sont les réels de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où k est un entier relatif.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 5x=0 \quad (1)$.

On utilise le résultat du 1°).
Les solutions de l'équation $\cos X=0$ peuvent s'écrire sous la forme d'une seule famille.

$$(1) \Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Les solutions de (1) sont les réels de la forme $\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$ où k est un entier relatif.

VII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=a$ où a est un réel quelconque fixé et la relation de récurrence $u_{n+1}=2(u_n)^2-1$ pour tout entier naturel n.

1°) On suppose que $u_p=1$ pour un entier naturel p. Que vaut alors u_{p+1} ?

$$u_{p+1}=2(u_p)^2-1$$

$$=2\times1-1$$

$$=1$$

2°) On suppose dans cette question que $a=0$. Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

• Que peut-on dire de la suite (u_n) dans ce cas ? Répondre avec précision en justifiant brièvement à l'aide du résultat de la question 1°).

On observe que $u_1=-1$ et que $u_2=1$.
En utilisant le résultat du 1°) et un raisonnement de proche en proche, on peut dire que tous les termes d'indice $n\geqslant 2$ sont égaux à 1.
La suite (u_n) est donc stationnaire à partir de l'indice 2.

• Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 au brouillon.
Exprimer S_n en fonction de *n* pour *n* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

$S_0=u_0=0$

$S_1=u_0+u_1=-1$

$S_2=u_0+u_1+u_2=0$

$S_3=u_0+u_1+u_2+u_3=1$

Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$,

$S_n=0-1+(n-1)\times 1$

$\quad =n-2$

On s'assure que cette « formule » coïncide avec les résultats obtenus pour $n=3$, $n=4$ …

VIII.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(x+\sqrt{2}\right)^2=(x+3)(x-1)+7 \quad (\text{E})$.

Écrire l'ensemble des solutions *S* sur la ligne ci-dessous.

$(1) \Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{2}+2=x^2+2x-3+7$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{2}=2x+2$

$\Leftrightarrow x\sqrt{2}-x=1$

$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}-1\right)=1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}+1$

Soit *S* l'ensemble de solutions de (1).

$S=\left\{\sqrt{2}+1\right\}$