TS1

Contrôle du mardi 29 mai 2019 (50 minutes)

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) qui suit la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel u, on pose $\mathrm{F}(u) = P(\mathrm{X} \leqslant u)$ et $\mathrm{G}(u) = P(\mathrm{X} \geqslant u)$.

Pour tout réel u strictement positif, on pose $\mathrm{H}(u) = P(-u \leqslant \mathrm{X} \leqslant u)$.

1°) Soit u un réel quelconque. Comparer $\mathrm{F}(-u)$ et $\mathrm{G}(u)$.
On ne demande pas de justifier. On pourra raisonner géométriquement.
On se contentera de donner la réponse sur une seule ligne.

……..

2°) Soit u un réel strictement positif quelconque.
Exprimer $\mathrm{H}(u)$ en fonction de $\mathrm{F}(u)$.
On demande de justifier en détaillant les calculs.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

3°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au centième du réel u tel que $\mathrm{H}(u) = 0{,}95$.
On donnera la réponse sans justifier.

…….. (une seule réponse, sans égalité)

4°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième du réel u tel que $\mathrm{F}(u) = 3\mathrm{G}(u)$.

…….. (une seule réponse, sans égalité)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère une maladie contre laquelle un vaccin et un médicament ont été mis au point.

1°) Le vaccin est fabriqué par une entreprise sous forme de dose injectable par seringue. Le volume V (exprimé en millilitre) d'une dose suit une loi normale d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ. La probabilité que le volume d'une dose, exprimé en millilitre, soit compris entre 1,99 et 2,01 millilitres est égale à 0,997.
Déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

…….. (une seule réponse, sans égalité)

2°) Une boîte du médicament permet de soigner un malade. La durée d'efficacité (exprimée en mois) de ce médicament est modélisée de la manière suivante :
- durant les 12 premiers mois après fabrication, on est certain qu'il demeure efficace ;
- au-delà, sa durée d'efficacité restante suit une loi exponentielle de paramètre λ.

La probabilité que l'une des boîtes prise au hasard dans un stock ait une durée d'efficacité totale supérieure à 18 mois est égale à 0,887.
Quelle est la valeur moyenne de la durée d'efficacité totale de ce médicament ?
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième (la valeur moyenne étant exprimée en mois).

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

III. (4 points)

Jean souhaite se rendre au cinéma. Il peut y aller à vélo ou en bus.
Pour un trajet en vélo, la durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[12\,;15]$.

Pour un trajet en bus, la durée du parcours entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}5$.
Comparer la probabilité que Jean mette entre 12 et 14 minutes selon le mode de locomotion utilisé.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Une grande ville a constitué dans ses médiathèques un stock important de films d'animation destinés au jeune public dont la durée (exprimée en minutes), peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 80$ et d'écart-type $\sigma = 9,36$.
On donnera les troncatures au millième des probabilités demandées.

1°) Calculer la probabilité qu'un film choisi au hasard dure plus de 92 minutes.

…….. (une seule réponse, sans égalité)

2°) Un enfant regarde un film d'animation dont il ne connaît pas la durée.
Sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie, quelle est la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent ?

…….. (une seule réponse, sans égalité)

Justifier la démarche sur les lignes ci-dessous.

……

……

……

……

……

V. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Une société de location de voiture propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours). Le directeur de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée (hypothèse H). Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.

1°) En supposant que l'affirmation du directeur est correcte, déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée.
Écrire l'intervalle sur la ligne ci-dessous, obtenu en arrondissant au millième les bornes de I.

…….. (une seule réponse)

2°) Que peut-on penser de l'affirmation du directeur ? Justifier avec précision en utilisant le résultat du 1°).

……

……

……

Corrigé du contrôle du 29-5-2019

I.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) qui suit la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel u, on pose $\mathrm{F}(u) = P(\mathrm{X} \leqslant u)$ et $\mathrm{G}(u) = P(\mathrm{X} \geqslant u)$.

Pour tout réel u strictement positif, on pose $\mathrm{H}(u) = P(-u \leqslant \mathrm{X} \leqslant u)$.

> Il n'est pas possible d'exprimer $\mathrm{F}(u)$, $\mathrm{G}(u)$ et $\mathrm{H}(u)$ en fonction de u.
> Il est important de remarquer d'emblée que $\mathrm{G}(u) = 1 - \mathrm{F}(u)$.

1°) Soit u un réel quelconque. Comparer $\mathrm{F}(-u)$ et $\mathrm{G}(u)$.

On ne demande pas de justifier. On pourra raisonner géométriquement.
On se contentera de donner la réponse sur une seule ligne.

$$\mathrm{F}(-u) = \mathrm{G}(u)$$

Cette égalité provient du fait que la fonction de densité de la loi normale centrée réduite est paire. La courbe de Gauss admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie dans un repère orthogonal.
La propriété est très facile à illustrer dans le cas où u est positif.
On s'aperçoit qu'elle est également vraie lorsque u est un réel négatif.

2°) Soit u un réel strictement positif quelconque.

Exprimer $\mathrm{H}(u)$ en fonction de $\mathrm{F}(u)$.

On demande de justifier en détaillant les calculs.

On a $\mathrm{F}(-u) + \mathrm{H}(u) + \mathrm{G}(u) = 1$ (somme de probabilités qui se visualise graphiquement) d'où $\mathrm{G}(u) + \mathrm{H}(u) + \mathrm{G}(u) = 1$ ce qui donne $2\mathrm{G}(u) + \mathrm{H}(u) = 1$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathrm{H}(u) &= 1 - 2\mathrm{G}(u) \\ &= 1 - 2\left[1 - \mathrm{F}(u)\right] \qquad (\text{on utilise } \mathrm{G}(u) = 1 - \mathrm{F}(u)) \\ &= 2\mathrm{F}(u) - 1 \end{aligned}$$

3°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au centième du réel u tel que $\mathrm{H}(u) = 0{,}95$.

On donnera la réponse sans justifier.

1,96 (une seule réponse, sans égalité)

On rappelle que $u > 0$.
Il s'agit d'une valeur remarquable utilisée dans les intervalles de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

4°) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième du réel u tel que $\mathrm{F}(u) = 3\mathrm{G}(u)$.

0,674 (une seule réponse, sans égalité)

Il y a deux méthodes.

1ère méthode :

On utilise la touche résol de la calculatrice.

E1 : normaFRép$(-1\text{E}99, \mathrm{X}, 0, 1)$
E2 : $3 *$ normaFRép$(\mathrm{X}, 1\text{E}99, 0, 1)$

2e méthode :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \mathrm{F}(u) = 3(1 - \mathrm{F}(u)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{F}(u) = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{F}(u) = 0{,}75 \end{aligned}$$

On utilise ensuite la commande « invNormale » de la calculatrice.

II.

On considère une maladie contre laquelle un vaccin et un médicament ont été mis au point.

1°) Le vaccin est fabriqué par une entreprise sous forme de dose injectable par seringue. Le volume V (exprimé en millilitre) d'une dose suit une loi normale d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ. La probabilité que le volume d'une dose, exprimé en millilitre, soit compris entre 1,99 et 2,01 millilitres est égale à 0,997.
Déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

0,003 (une seule réponse, sans égalité)

L'information principale de l'énoncé est $P(1{,}99 \leqslant \mathrm{V} \leqslant 2{,}01) = 0{,}997$.

Il y a deux méthodes.

• 1ère méthode : utilisation de la touche résol de la calculatrice

E1 : normalFRép$(1.99, 2.01, 2, \mathrm{X})$
E2 : 0.997

On obtient : 0,00336955374967.

• 2e méthode : utilisation de la variable $\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{V} - 2}{\sigma}$

On sait que T suit la loi normale centrée réduite.

$1,99 \leqslant V \leqslant 2,01 \Leftrightarrow -\dfrac{0,01}{\sigma} \leqslant T \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma}$

On sait que $P(1,99 \leqslant V \leqslant 2,01) = 0,997 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) = 0,997$$
$$\Leftrightarrow \frac{0,01}{\sigma} = u \quad \text{où } u \text{ est le réel tel que } P(-u \leqslant T \leqslant u) = 0,997$$
$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{0,01}{u}$$

Sur TI-83 Premium CE, on tape : 0.01 / invNormale(0.997,0,1,CTR).

On obtient l'affichage {– 0,0033695698 0,0033695698}.

La valeur arrondie de σ au millième est donc 0,003.

Variante :

$$(1) \Leftrightarrow 2P\left(T \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) - 1 = 0,997$$
$$\Leftrightarrow P\left(T \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) = \frac{1,997}{2}$$
$$\Leftrightarrow P\left(T \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) = 0,9985$$
$$\Leftrightarrow \frac{0,01}{\sigma} = u \quad \text{où } u \text{ est le réel tel que } P(T \leqslant u) = 0,9985$$
$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{0,01}{u}$$

Sur TI-83 Premium CE, on tape : 0.01 / invNormale(0.9985,0,1,GAUCH).

On obtient $\sigma = 0,003369569\ldots$.

Il est possible aussi de se raccrocher au résultat sur les plages de normalité.

2°) Une boîte du médicament permet de soigner un malade. La durée d'efficacité (exprimée en mois) de ce médicament est modélisée de la manière suivante :
- durant les 12 premiers mois après fabrication, on est certain qu'il demeure efficace ;
- au-delà, sa durée d'efficacité restante suit une loi exponentielle de paramètre λ.

La probabilité que l'une des boîtes prise au hasard dans un stock ait une durée d'efficacité totale supérieure à 18 mois est égale à 0,887.
Quelle est la valeur moyenne de la durée d'efficacité totale de ce médicament ?
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième (la valeur moyenne étant exprimée en mois).

On note T la durée totale d'efficacité et X la durée restant après 12 mois.

On sait que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et que $T = X + 12$.

D'après l'énoncé, $P(T > 18) = 0,887$.

Or $T > 18 \Leftrightarrow X > 6$.
Donc $P(X > 6) = 0,887 \quad (1)$.

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leqslant 6)$$
$$= 1 - \int_0^6 \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$
$$= 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^6$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-6\lambda}\right)$$
$$= e^{-6\lambda}$$

$$(1) \Leftrightarrow e^{-6\lambda} = 0,887$$
$$\Leftrightarrow -6\lambda = \ln 0,887$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,887}{6}$$

On a $E(T) = E(X) + 12$. Or on sait que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (formule de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle).

Ainsi, $E(T) = 12 - \dfrac{6}{\ln 0,887}$.

Grâce à la calculatrice, on obtient : $E(T) = 62,0374043\ldots$.

La valeur arrondie au dixième est 62,0.

III.

Jean souhaite se rendre au cinéma. Il peut y aller à vélo ou en bus.
Pour un trajet en vélo, la durée du trajet entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[12\,;15]$.
Pour un trajet en bus, la durée du parcours entre son domicile et le cinéma (exprimée en minutes) est modélisée par la variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 14$ et d'écart-type $\sigma = 1,5$.
Comparer la probabilité que Jean mette entre 12 et 14 minutes selon le mode de locomotion utilisé.

● En vélo :

$$P(12 \leqslant X \leqslant 14) = \frac{14-12}{15-12} = \frac{2}{3}$$

On a donc $P(12 \leqslant X \leqslant 14) = 0,66\underline{6}\ldots$

● En bus :

La valeur arrondie au millième de $P(12 \leqslant Y \leqslant 14)$ est 0,409.

La probabilité que Jean mette entre 12 et 14 minutes est supérieure s'il utilise le vélo.

IV.

Une grande ville a constitué dans ses médiathèques un stock important de films d'animation destinés au jeune public dont la durée (exprimée en minutes), peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 80$ et d'écart-type $\sigma = 9,36$.
On donnera les troncatures au millième des probabilités demandées.

1°) Calculer la probabilité qu'un film choisi au hasard dure plus de 92 minutes.

0,099 (une seule réponse, sans égalité)

Grâce à la calculatrice, on obtient $P(X \geqslant 92) = 0,099912394\ldots$

2°) Un enfant regarde un film d'animation dont il ne connaît pas la durée.
Sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie, quelle est la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent ?

0,617 (une seule réponse, sans égalité)

Justifier la démarche sur les lignes ci-dessous.

On doit calculer une probabilité conditionnelle (présence d'un « sachant que » dans la formulation).

On convertit d'abord 1 h 30 min = 90 min .

$$P(X \leqslant 95 / X \geqslant 90) = \frac{P\big((X \leqslant 95) \cap (X \geqslant 90)\big)}{P(X \geqslant 90)} \qquad \text{(définition d'une probabilité conditionnelle)}$$

$$= \frac{P(90 \leqslant X \leqslant 95)}{P(X \geqslant 90)}$$

$$= 0,617905911...$$

On effectue d'un coup tout le calcul : « normalFRép(90,95,80,3.96)/normalFRép(90,10^{99},80,3.96).

Comme il s'agit d'une loi normale et non d'une loi exponentielle, il n'y a aucune formule pour simplifier.

V.

Une société de location de voiture propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours). Le directeur de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée (hypothèse H). Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.

Il s'agit d'un exercice d'échantillonnage (prise de décision ou test d'hypothèse).

1°) En supposant que l'affirmation du directeur est correcte, déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée.
Écrire l'intervalle sur la ligne ci-dessous, obtenu en arrondissant au millième les bornes de I.

$[0,767 ; 0,832]$ (une seule réponse)

On applique la formule du cours avec $n = 600$ et $p = 0,8$.

On vérifie que les conditions d'application de la formule sont bien remplies.
$n \geqslant 30$
$np \geqslant 5$
$n(1-p) \geqslant 5$

À ce stade, on ne peut pas dire si l'hypothèse H est à rejeter ou non (on évite de dire que l'hypothèse H est vraie ou fausse). Le test d'hypothèse n'intervient que dans la question 2°).
Le terme « hypothèse » est pris dans son sens statistique.

2°) Que peut-on penser de l'affirmation du directeur ? Justifier avec précision en utilisant le résultat du 1°).

La fréquence observée de contrats de courte durée dans cet échantillon est $f = \frac{550}{600} = \frac{11}{12} = 0,916\underline{6}\ldots$

$f \notin I$ donc on peut rejeter l'affirmation du directeur au seuil de 95 %.