1$^{\text{ère}}$ S2

Devoir pour le mercredi 5 juin 2019

On attend une rédaction précise.

I. Le folium de Descartes

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Il s'agit d'une courbe définie de manière « implicite ». On ne peut pas exprimer *y* en fonction de *x* ni *x* en fonction de *y*. Cette équation cartésienne ne correspond à aucune de celles étudiées cette année.
On notera en particulier que $\mathscr{C}$ n'est pas la courbe d'une fonction.
Cette courbe s'appelle un **folium de Descartes**. Le mot *folium* signifie feuille en latin.

Descartes est un philosophe et mathématicien français (1596-1650).

Tracer $\mathscr{C}$ sur *Geogebra* (on pourra prendre la version en ligne). On complétera la figure au fur et à mesure des questions.
On ne demande pas d'imprimer la courbe.

La courbe $\mathscr{C}$ est une courbe algébrique appelée cubique. Elle n'est pas traçable sur l'écran de la calculatrice.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Vérifier que $\mathrm{O} \in \mathscr{C}$.

2°) Quelle droite Δ peut-on conjecturer comme axe de symétrie pour $\mathscr{C}$?

Rédaction : « D'après le graphique, on peut conjecturer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation… pour axe de symétrie. »

Facultatif : Justifier cette conjecture.

Comme indiqué plus haut, cette question est indépendante de celles qui suivent. On n'aura pas à utiliser la conjecture émise.

3°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection $\mathscr{C}$ et de Δ.
Rédiger ainsi : « Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ sont les solutions de l'équation … (écrire l'équation aux abscisses). ».

4°) On admet qu'il existe trois points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est égale à 1.
On note x_1, x_2, x_3 leurs abscisses rangées dans l'ordre croissant.
Déterminer à l'aide de la calculatrice les valeurs arrondies au millième de x_1, x_2, x_3.
Attention, on ne peut déterminer les valeurs exactes de x_1, x_2, x_3. On se gardera d'écrire $x_1 = \ldots$, $x_2 = \ldots$, $x_3 = \ldots$.

5°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite *D* d'équation $x + y = 1$.

6°) On note Γ le cercle de centre O et de rayon 1.
On admet que Γ coupe $\mathscr{C}$ en quatre points I, J, K, L.
Déterminer les valeurs arrondies au millième de leurs abscisses.

Indication : On pourra utiliser la résolution approchée de systèmes d'équations sur le site « dcode ».

On pourra s'amuser à tracer sur *Geogebra* les courbes d'équations $x^3 + y^3 + 3xy = 0$, $x^3 + y^3 - 3\lvert xy \rvert = 0$ … éventuellement $x^3 + y^3 + axy = 0$ où *a* est un paramètre réel et observer par quelles transformations ou procédés géométriques simples ces courbes se déduisent du folium de Descartes.

II. Les nombres de Catalan

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(u_k \times u_{n-k}\right)$ pour tout entier naturel *n*.

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6. On ne détaillera les calculs que pour u_1 et u_2
Les nombres u_0, u_1, u_2, u_3 … sont appelés **nombres de Catalan**.

Eugène Catalan est un mathématicien français et belge du XIX$^{\text{e}}$ siècle (1814 à Bruges – 1894 à Liège).

Informations :

Il n'est pas demander de chercher les démonstrations des deux résultats suivants.

• On peut démontrer que u_n est un entier naturel quel que soit l'entier naturel *n*.

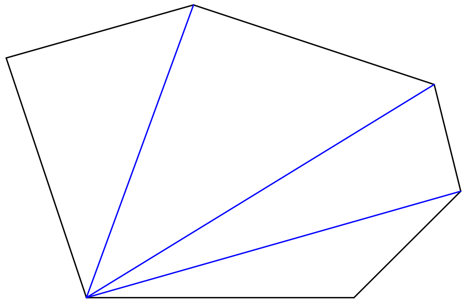
• On peut également démontrer la formule explicite $u_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{n! \times (n+1)!}$.

La notation ! désigne la **factorielle**. La factorielle d'un entier naturel *n* est noté *n* ! et est définie de la manière suivante : • pour $n \geqslant 2$, n ! est égal au produit de tous les entiers de 1 à *n* c'est-à-dire $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$; • $1! = 1$ et $0! = 1$ par convention. On a ainsi par exemple $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ (on peut d'ailleurs observer que $4! = 3! \times 4$) etc.

Partie 2 (une application au dénombrement)

Trianguler un polygone convexe à *n* côtés consiste à tracer un certain nombre de cordes dans le polygone (segments reliant deux sommets non adjacents du polygone), de façon à le découper en triangles (les cordes ne doivent donc pas se couper).

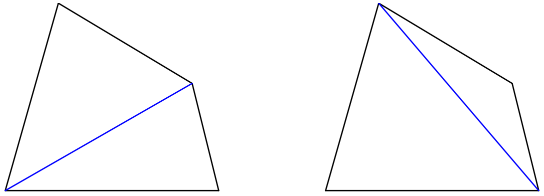
On donne ci-dessous un exemple de triangulation d'un hexagone convexe :



Pour tout entier naturel *n*, on note t_n le nombre de triangulations distinctes d'un polygone convexe à $n+2$ côtés (en convenant que $t_0=1$).

t_1 désigne le nombre de triangulations d'un polygone convexe à $1+2=3$ côtés c'est-à-dire d'un triangle.
Il y a une seule triangulation possible, à savoir le triangle lui-même. Par conséquent, $t_1=1$.

t_2 désigne le nombre de triangulations d'un polygone convexe à $2+2=4$ côtés c'est-à-dire d'un quadrilatère convexe.
Il y a deux triangulations possibles comme le montre les figures ci-dessous. Par conséquent, $t_2=2$.



1°) Faire plusieurs figures assez grandes montrant les différentes triangulations possibles d'un pentagone convexe.
En déduire la valeur de t_3.

2°) On admet que $t_4=14$ (on pourra s'en convaincre en représentant toutes les triangulations d'un hexagone convexe en dehors de celle déjà tracée plus haut).

• Quelle conjecture peut-on faire entre t_n et u_n quel que soit l'entier naturel *n* ?

• On admet que cette conjecture est vraie.
Préciser alors le nombre de triangulations possibles d'un heptagone convexe et d'un octogone convexe.

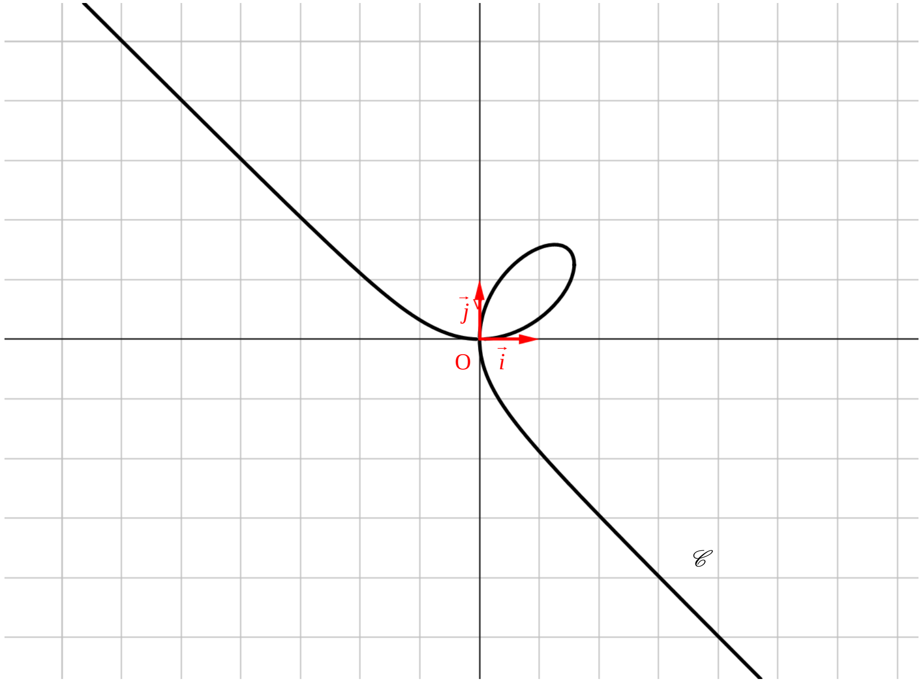
Rédaction : On s'attachera tout particulièrement à la précision du vocabulaire jusque dans les articles et les pronoms employés.
On s'efforcera de rédiger sous forme de phrases courtes en passant à la ligne à chaque nouvelle idée.

Partie 3 (programmation en Python)

Rédiger une fonction Python `catalan(n)` qui renvoie la valeur de u_n.
Indication : Utiliser les listes et la fonction `sum` qui permet de calculer la somme des éléments d'une liste.

Corrigé du DM pour le 5-6-2019

I.



On observe que $\mathscr{C}$ n'est pas la courbe représentative d'une fonction (à cause de la boucle).
L'équation cartésienne proposée pour $\mathscr{C}$ est de la forme $f(x, y) = 0$ sans qu'il y ait moyen d'exprimer l'une des coordonnées en fonction de l'autre (*x* en fonction de *y* ou *y* en fonction de *x*).
On peut démontrer que $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $x + y = -1$ pour asymptote.

1°) On a $0^3 + 0^3 - 3 \times 0 \times 0 = 0$ donc $\text{O} \in \mathscr{C}$.

2°) D'après le graphique obtenu sur *Geogebra*, on peut conjecturer que $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x$ pour axe de symétrie.
Il n'est pas inutile que la droite Δ est appelée la première bissectrice du repère.

Justification :

Soit $\text{M}\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$ un point quelconque du plan.

Son image dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ est le point $\text{M}'\left|\begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array}\right.$.

$$\begin{aligned} \text{M} \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ &\Leftrightarrow (y')^3 + (x')^3 - 3y'x' = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{M}' \in \mathscr{C} \end{aligned}$$

3°) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ sont les solutions de l'équation $x^3 + x^3 - 3x \times x = 0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(2x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ sont 0 et $\frac{3}{2}$.

On vérifie graphiquement.

> Lorsque l'on résout l'équation avec la calculatrice, on s'aperçoit que 0 est racine double de l'équation.

4°) Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1 sont les solutions de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (2)$.

(2) est une équation polynomiale du troisième degré (incomplète).

(2) admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ dont la calculatrice permet de trouver les valeurs arrondies au millième : – 1,879 ; 1,332 ; 0,347.

> On ne peut pas déterminer les valeurs exactes des solutions de l'équation.

5°) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de *D* sont les solutions de l'équation
$x^3 + (1 - x)^3 - 3x \times (1 - x) = 0 \quad (3)$.

> Il faut avoir le réflexe de remplacer *y* par $1 - x$ pour se ramener à une équation à une seule inconnue.

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3x + 3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \text{(équation du second degré)} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$
(résolution de l'équation par discriminant réduit, vérification à la calculatrice)

> On vient d'obtenir les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de *D*.
> Pour calculer les ordonnées, on utilise l'équation réduite de *D*.

Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de *D* ont pour coordonnées $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6} ; \frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right)$ et $\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6} ; \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)$.

On peut écrire $\mathscr{C} \cap D = \{I ; J\}$ avec $I\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6} ; \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ et $J\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6} ; \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

6°) Le cercle Γ a pour équation $x^2 + y^2 = 1$.

6°) On note Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ sont les solutions du système $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système non linéaire.

Le mieux est d'utiliser le site « dcode ».

On obtient : $x_I = -0,95540...$, $x_J = 0,29528...$, $x_K = 0,31158...$, $x_L = 0,95021...$

II.

Partie 1

Pour calculer les premiers termes, on utilise la relation de récurrence.

Les termes se calculent donc sous la forme de sommes.

$$u_1 = \sum_{k=0}^{k=0} (u_k \times u_{0-k}) \quad \text{(on remplace } n \text{ par 0)}$$

$$= u_0 \times u_{0-0}$$

$$= u_0 \times u_0$$

$$= 1$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^{k=1} (u_k \times u_{1-k}) \quad \text{(on remplace } n \text{ par 1)}$$

$$= u_0 \times u_{1-0} + u_0 \times u_{1-0}$$

$$= 2$$

$u_4 = 14$

$u_5 = 42$

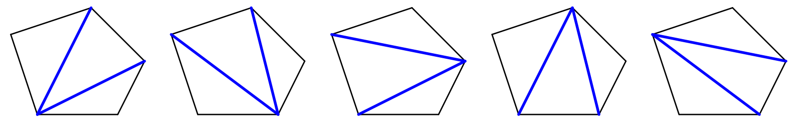
$u_6 = 132$

Il pourrait être intéressant de créer un programme permettant de calculer les termes.

Partie 2

Attention, t_n désigne le nombre de triangulations distinctes d'un polygone convexe à $\boxed{n+2}$ côtés (et non n côtés).

1°)



Il y a 5 triangulations possibles d'un pentagone convexe. Ainsi, $t_3 = 5$.

2°)

● En comparant les valeurs de t_n et u_n pour les entiers naturels n inférieurs ou égaux à 4, on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = u_n$.

● Le nombre de triangulations possibles d'un heptagone convexe et d'un octogone convexe sont respectivement donnés par t_5 et t_6.

Grâce aux résultats de la partie 1, on a $t_5 = 42$ et $t_6 = 132$.

Partie 3 (programmation en Python)

```python
def catalan(n):
    c=[1]
    for i in range(n):
        c.append(sum(c[k]*c[i-k] for k in range(i+1)))
    return c[n]
```