Partie pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le barème est donné sur 20.

Prénom : ……..… **Nom :** ……

I. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $e^{E(\ln x)} = 1 \quad (1)$ et $E(\ln x) = 2 \quad (2)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3\cos x - 2\sin 2x$.

1°) Calculer les images de $\dfrac{2019\pi}{4}$ et $-\dfrac{2018\pi}{2}$ par f.

……

2°) On note α le réel de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$.

• Déterminer grâce à la calculatrice la valeur arrondie au millième de α.

…….. (une seule réponse, sans égalité)

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0 \quad (E)$.

On exprimera les solutions en fonction de α.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et Γ la courbe représentative de la fonction cosinus.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ.
On attend une rédaction soignée débutant par « Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ sont les solutions de l'équation … ».

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

4°) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = -1$.

…… (une seule égalité, sans justifier)

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(|x-1|+1\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Exprimer $f(x)$ sans barre de valeurs absolues suivant les valeurs de x.

……

……

2°) Former le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ avec les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

3°) Soit m un réel positif ou nul.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = m \quad (E_m)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 21-2-2019
Partie réservée n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $e^{E(\ln x)} = 1 \quad (1)$ et $E(\ln x) = 2 \quad (2)$.

On résout les deux équations dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow E(\ln x) = 0$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \ln x < 1$ (inégalité large à gauche, stricte à droite)

$\Leftrightarrow 1 \leqslant x < e$ (inégalité large à gauche, stricte à droite)

Soit S_1 l'ensemble de solutions de (1).

$S_1 = [1\,;e[$

$(2) \Leftrightarrow 2 \leqslant \ln x < 3$

$\Leftrightarrow e^2 \leqslant x < e^3$

Soit S_2 l'ensemble de solutions de (2).

$S_2 = [e^2\,;e^3[$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3\cos x - 2\sin 2x$.

1°) Calculer les images de $\dfrac{2019\pi}{4}$ et $-\dfrac{2018\pi}{2}$ par f.

$$f\left(\frac{2019\pi}{4}\right) = \frac{4-3\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(-\frac{2018\pi}{2}\right) = -3$$

2°) On note α le réel de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$.

• Déterminer grâce à la calculatrice la valeur arrondie au millième de α.

0,848 (une seule réponse, sans égalité)

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0 \quad (E)$.

On exprimera les solutions en fonction de α.

$(E) \Leftrightarrow 3\cos x - 2\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos x - 4\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(3 - 4\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $3 - 4\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\sin x = \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\sin x = \sin\alpha$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ (on « enlève » les cos avec la propriété du cours)

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\alpha + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k''\pi,\ k'' \in \mathbb{Z}\}$$

3°) Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et Γ la courbe représentative de la fonction cosinus.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ.
On attend une rédaction soignée débutant par « Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ sont les solutions de l'équation … ».

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ sont les solutions de l'équation $3\cos x - 2\sin 2x = \cos x \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 2\cos x - 2\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ (on « enlève » les cos avec la propriété du cours)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} - 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

4°) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = -1$.

$$F(x) = 3\sin x + \cos 2x - 2 \text{ (une seule égalité, sans justifier)}$$

On vérifie aisément que la dérivée de F est f et que l'image de 0 par F est bien égale à – 1.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(|x-1|+1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Exprimer $f(x)$ sans barre de valeurs absolues suivant les valeurs de x.

• Si $x \geqslant 1$, $f(x) = \ln(x-1+1) = \ln x$.

• Si $x \leqslant 1$, $f(x) = \ln(1-x+1) = \ln(2-x)$.

2°) Former le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ avec les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

On peut éventuellement dériver f sur les intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ s'obtiennent sans difficulté.

3°) Soit m un réel positif ou nul.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = m \quad (E_m)$.

$(E_m) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(2-x) = m \\ x \leqslant 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \ln x = m \\ x > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = e^m \\ x \leqslant 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = e^m \\ x > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - e^m \\ x \leqslant 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = e^m \\ x > 1 \end{cases}$

Comme m est positif ou nul par hypothèse, $e^m \geqslant 1$ donc $2 - e^m \leqslant 1$.

Pour le système $\begin{cases} x = e^m \\ x > 1 \end{cases}$, il faut distinguer deux cas selon que $m > 0$ ou $m = 0$.

1er cas : $m > 0$

Dans ce cas, $e^m > 1$.

On en déduit que $(E_m) \Leftrightarrow x = 2 - e^m$ ou $x = e^m$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m) est $S_m = \{e^m ; 2 - e^m\}$.

2e cas : $m = 0$

Dans ce cas, $e^0 = 1$.

On en déduit que $(E_0) \Leftrightarrow x = 1$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) est $S_0 = \{1\}$.