1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 5 avril 2019
(50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2 points) Question de cours

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[\mathrm{BC}]$.
On pose $\mathrm{AB} = c$, $\mathrm{BC} = a$, $\mathrm{CA} = b$, $\mathrm{AI} = m$.
Exprimer m^2 en fonction de *a*, *b*, *c*.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Soit ABC un triangle tel que $\mathrm{AB} = x + 1$, $\mathrm{AC} = x - 1$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = 60°$ où *x* est un réel strictement supérieur à 1.

1°) Exprimer BC en fonction de *x*. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Exprimer l'aire *S* de ABC en fonction de *x*.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{4n^2 + 12n + 9}$.
Déterminer une expression simplifiée de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (3 points)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -2$.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

V. (3 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $r = -4$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

VI. (2 points)

Un cinéma propose un abonnement annuel à 50 euros qui permet d'acheter chaque place au tarif de 6 euros.
Une personne ayant l'abonnement achète *n* tickets (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Quel le prix moyen d'une séance en fonction de *n* ?

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

VII. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{9^{n-1}}{3^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*.

Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

VIII. (1 point)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
À l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme, calculer
$S = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + ... + \sqrt{u_{2019}}$.
On donnera la valeur arrondie au centième.

…………………………… (un seul résultat <u>sans égalité</u>)

Corrigé du contrôle du 5-4-2019

I.

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[\text{BC}]$.
On pose $\text{AB} = c$, $\text{BC} = a$, $\text{CA} = b$, $\text{AI} = m$.
Exprimer m^2 en fonction de *a*, *b*, *c*.

On applique la formule de la médiane en situation.

La formule de la médiane dans le triangle ABC permet d'écrire $\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = 2\text{AI}^2 + \dfrac{\text{BC}^2}{2}$.

Avec les notations de l'énoncé, on obtient immédiatement $2m^2 = c^2 + b^2 - \dfrac{a^2}{2}$ ce qui donne finalement

$m^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

II.

Soit ABC un triangle tel que $\text{AB} = x+1$, $\text{AC} = x-1$ et $\widehat{\text{BAC}} = 60°$ où *x* est un réel strictement supérieur à 1.

1°) Exprimer BC en fonction de *x*. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

D'après la « formule du côté » (formule d'Al Kashi) dans le triangle ABC, on a :

$$\begin{aligned}
\text{BC}^2 &= \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2\times\text{AB}\times\text{AC}\times\cos\widehat{\text{BAC}}\\
&= (x+1)^2 + (x-1)^2 - 2\times(x+1)\times(x-1)\times\cos 60°\\
&= x^2 \cancel{+2x} + 1 + x^2 \cancel{-2x} + 1 - \cancel{2}\times(x^2-1)\times\frac{1}{\cancel{2}}\\
&= 2x^2 + 2 - (x^2-1)\\
&= x^2 + 3
\end{aligned}$$

On en déduit que $\text{BC} = \sqrt{x^2+3}$.

2°) Exprimer l'aire *S* de ABC en fonction de *x*.

$$S = \frac{1}{2}\text{AB}\times\text{AC}\times\sin\widehat{\text{BAC}}$$

$$S = \frac{1}{2}(x+1)\times(x-1)\times\sin 60°$$

$$S = \frac{1}{2}(x^2-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{(x^2-1)\sqrt{3}}{4}$$

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{4n^2+12n+9}$.

Déterminer une expression simplifiée de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{(2n+3)^2}$

$= |\,2n+3\,|$

$= 2n+3$ (car *n* est un entier naturel par hypothèse donc $2n+3$ est positif ou nul ce qui permet d'enlever les barres de valeur absolue)

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.

IV.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -2$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

S_n est la somme de tous les termes de u_0 à u_n. Il y a $n+1$ termes.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = u_0 \times \frac{1-(-2)^{n+1}}{1+2}$$

$$= \cancel{3} \times \frac{1-(-2)^{n+1}}{\cancel{3}}$$

$= 1-(-2)^{n+1}$ (on ne peut pas aller plus loin)

Il faut faire bien attention à écrire les parenthèses autour du -2. On ne peut pas les enlever.
On ne peut pas simplifier la formule obtenue en $1+(-2)^{n+1}$.

Il peut être intéressant de tester la formule.
Par exemple, pour $n = 0$, $S_0 = u_0 = 3$.

Si l'on applique la formule obtenue pour $n = 0$, on obtient $1-(-2)^{0+1} = 1+2 = 3$.

V.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $r = -4$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

S_n est la somme de tous les termes de u_1 à u_n. Il y a *n* termes.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$= n \times \frac{3 + 3 - 4(n-1)}{2}$$

$$= n \times \frac{10 - 4n}{2}$$

$$= n \times (5 - 2n)$$

$$= 5n - 2n^2$$

Il peut être intéressant de tester la formule.
Par exemple, pour $n = 1$, $S_1 = u_1 = 3$.
Si l'on applique la formule obtenue pour $n = 1$, on obtient $5 \times 1 - 2 \times 1^2 = 3$.

VI.

Un cinéma propose un abonnement annuel à 50 euros qui permet d'acheter chaque place au tarif de 6 euros.
Une personne ayant l'abonnement achète *n* tickets (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Quel le prix moyen d'une séance en fonction de *n* ?

Le prix moyen d'une séance en euros est égal à $\frac{50 + 6n}{n}$ (prix total divisé par le nombre de tickets).

On peut transformer cette expression en $\frac{50}{n} + 6$.

VII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{9^{n-1}}{3^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier.

On peut conjecturer le résultat à l'aide de la calculatrice mais ensuite, il faut impérativement faire un calcul littéral.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 - \frac{\cancel{9^n} \times 9^{-1}}{\cancel{9^n}}$$

$$= 1 - 9^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

On en déduit que la suite (u_n) est constante.

VIII.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
À l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme, calculer
$S = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + ... + \sqrt{u_{2019}}$.
On donnera la valeur arrondie au centième.

104845,58

Il n'y a pas de formule.

On écrit $\sum_{K=0}^{2019} \left(\sqrt{2 + 3K}\right)$ (K est une variable muette, elle doit bien être la même dans l'expression et sous le symbole Σ).

$S = 104845,5816...$