TS1

Devoir pour le jeudi 28 mars 2019

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

I. On rappelle la définition suivante :

> Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on appelle **« factorielle de *n* »** le produit de tous les entiers naturels de 1 à *n*.
>
> On note ce nombre $n!$.
>
> On a donc : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Par exemple, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

On complète la définition en posant $0! = 1$ et $1! = 1$.

On a alors la propriété fondamentale : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$.

Les conventions pour la factorielle de 0 et de 1 ont été posées pour permettre que cette relation soit vraie pour tous les entiers naturels.

Sur la calculatrice TI 83 Premium CE, on a une commande permettant de calculer directement la factorielle d'un entier naturel en faisant $\boxed{\text{math}}$ menu PROB ou en utilisant le raccourci $\boxed{\text{alpha}}$ $\boxed{\text{fenêtre}}$ menu « FONC » puis choix 9.

Jusqu'à quel entier naturel, la calculatrice peut-elle calculer sa factorielle ?

Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $n! + (n+1)! \geqslant 10^{2019}$.

Indication : Utiliser le logarithme népérien.

II. Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère la droite *D* dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

1°) Démontrer que O n'appartient pas à *D*.

2°) On note *P* le plan défini par le point O et la droite *D*.

Déterminer un système d'équations paramétriques de *P*.

Corrigé du devoir pour le 28-3-2019

I. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $n!+(n+1)!\geqslant 10^{2019}$ (1).

D'abord 0 n'est pas solution de manière évidente.
On cherche n dans $\mathbb{N}^*$.

$$(1) \Leftrightarrow n!+n!\times(n+1)\geqslant 10^{2019}$$

$$\Leftrightarrow n!(1+n+1)\geqslant 10^{2019} \qquad \text{(on peut factoriser une expression avec des factorielles)}$$

$$\Leftrightarrow n!(n+2)\geqslant 10^{2019}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[n!(n+2)\right]\geqslant \ln\left(10^{2019}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln n!+\ln(n+2)\geqslant 2019\ln 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{k=n}\ln k\right)+\ln(n+2)\geqslant 2019\ln 10 \quad (1')$$

On a $2019\ln 10=4648,91930...$.

On cherche par tâtonnements ou en réalisant un programme sur calculatrice.

On trouve que le plus petit entier naturel n pour lequel $(1')$ (et par conséquent (1)) est vérifiée est 814.

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n}\ln k\right)+\ln(n+2)=4652,36894...$$

II.

1°) Le système $\begin{cases} 1+2t=0 \\ -2+t=0 \\ 1-3t=0 \end{cases}$ n'admet pas de solution donc $\mathrm{O} \notin D$.

2°) Le vecteur $\vec{u} \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{matrix} \right.$ est un vecteur directeur de *D*.

Le point $\mathrm{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ est un point de *D* (point obtenu pour $t=0$).

On vérifie très facilement que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{u}$.

Donc *P* a pour repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{u}\right)$.

Un système d'équations paramétriques de *P* est $\begin{cases} x=2t+t' \\ y=t-2t' \\ z=-3t+t' \end{cases} \quad \left((t,t') \in \mathbb{R}^2\right)$.

Variante :

On détermine deux points distincts A et B de *D*.

Un repère de *P* est $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.