1ère S2

Contrôle du vendredi 18 janvier 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………..…………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un système de sécurité comporte deux alarmes indépendantes ayant respectivement des probabilités de déclenchement en cas d'incident égales à 0,95 et 0,9.

1°) Quelle est la probabilité que les deux alarmes se déclenchent toutes les deux en cas d'incident ?

…………. (un seul résultat sous forme décimale sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité qu'au moins une des deux alarmes se déclenche ?

…………. (un seul résultat sous forme décimale sans égalité)

II. (3 points)

Deux joueurs A et B sont engagés dans un jeu en cinq parties successives indépendantes. À chaque partie, le joueur A a une chance sur trois de gagner et le joueur B a deux chances sur trois de gagner. Le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties.
On suppose dans l'exercice que le joueur A gagne la première partie.

● Faire un arbre en donnant à chaque fois le vainqueur.

● Quelle est la probabilité que le joueur A gagne le jeu (sachant qu'il a gagné la première partie) ?

………… (un seul résultat sous forme de fraction irréductible)

III. (5 points)

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Un jeu se déroule en plusieurs parties.
Chaque partie consiste à lancer deux fois de suite le dé. On note chaque fois le numéro porté par la face supérieure.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A (2 points)

On suppose dans cette partie que le dé n'est pas pipé.
Pour chaque partie, on effectue le produit des numéros obtenus.
Compléter l'algorithme ci-dessous qui pour n parties, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, affiche en sortie la fréquence de celles pour lesquelles on obtient un résultat strictement supérieur à 2.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i variant de 1 à n **Faire**
x prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 6
y prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 6
p prend la valeur …….
Si $p>2$
Alors a prend la valeur $a+1$
FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher ……..

Partie B (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans cette partie, on suppose que le dé est pipé.
Les probabilités d'apparition de chaque face en un lancer sont données dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,2	0,1	0,1	0,3	0,1	0,2

1°) Quelle est la probabilité que le produit des deux numéros obtenus en une partie soit impair ?

………… (un seul résultat sous forme décimale)

2°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le même numéro en une partie ?

………… (un seul résultat sous forme décimale)

3°) On effectue *n* parties à la suite de manière indépendante, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Quel est le plus petit entier naturel *n* tel que la probabilité d'obtenir au moins une fois les mêmes numéros lors d'une partie soit supérieure ou égale à 0,99 ?

………… (un seul résultat sans égalité)

Consigne valable pour les exercices IV, V, VI :

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$ et on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.

IV. Question de cours (2 points)

Soit *x* et *y* deux réel et M et N leurs images sur le cercle $\mathscr{C}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur *x* et *y* pour que les points M et N soient confondus.

On répondra par une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter :
« M et N sont confondus si et seulement si …. ».

……

……

V. (1 point)

Donner sans justifier trois réels associés au point B'.

……………………………………………………………… (écrire les réels séparés par des points-virgules)

VI. (5 points ; 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Soit *x* un réel quelconque et M son image sur le cercle $\mathscr{C}$.

On note M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses et M'' le point diamétralement opposé à M sur $\mathscr{C}$.

1°) Compléter par un réel en fonction de *x* les phrases suivantes.

- M' est l'image de ………… sur $\mathscr{C}$.

- M'' est l'image de ………… sur $\mathscr{C}$.

2°) À l'aide des propriétés sur les angles orientés, déterminer une mesure en radians en fonction de *x* des angles $\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OM}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM'}\right)$, $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction de *x*.
Pour chaque angle orienté on attend les calculs puis une phrase réponse sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Une mesure en radians de l'angle orienté … est … . »

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 18-1-2019

I.

Un système de sécurité comporte deux alarmes indépendantes ayant respectivement des probabilités de déclenchement en cas d'incident égales à 0,95 et 0,9.

1°) Quelle est la probabilité que les deux alarmes se déclenchent toutes les deux en cas d'incident ?

0,855 (un seul résultat sous forme décimale sans égalité)

On effectue le produit des probabilités 0,95 et 0,9 car il s'agit d'épreuves aléatoires indépendantes.

2°) Quelle est la probabilité qu'au moins une des deux alarmes se déclenche ?

0,995 (un seul résultat sous forme décimale sans égalité)

$1^{\text{ère}}$ méthode :

On considère l'événement contraire « Aucune des deux alarmes ne se déclenche ».
On effectue la soustraction $1-0,05\times 0,1$.

2^{e} méthode :

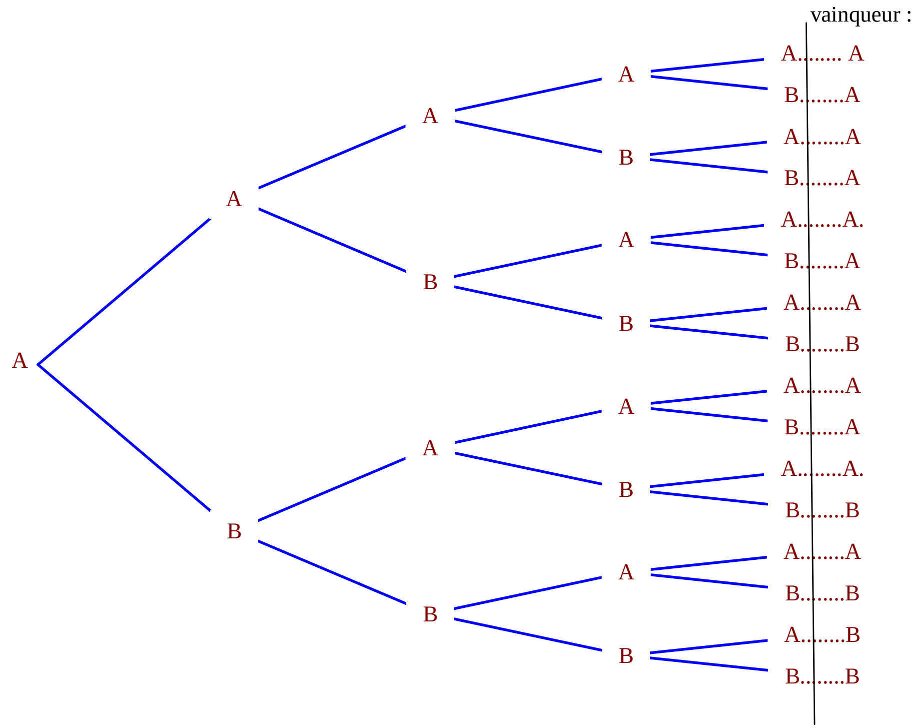
On fait un arbre avec les événements A : « L'alarme 1 se déclenche » et B : « L'alarme 2 se déclenche ».
Les chemins correspondant à l'événement « Au moins une des deux alarmes se déclenche » sont : A-B ; A-$\overline{\text{B}}$, $\overline{\text{A}}$-B.

On retrouve le même résultat qu'avec la première méthode.

II.

Deux joueurs A et B sont engagés dans un jeu en cinq parties successives indépendantes. À chaque partie, le joueur A a une chance sur trois de gagner et le joueur B a deux chances sur trois de gagner. Le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties.
On suppose dans l'exercice que le joueur A gagne la première partie.

• Faire un arbre en donnant à chaque fois le vainqueur.



• Quelle est la probabilité que le joueur A gagne le jeu (sachant qu'il a gagné la première partie) ?

$\frac{11}{27}$ (un seul résultat sous forme de fraction irréductible)

On note p la probabilité que le joueur A gagne.

$$p=\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}\right]\times 4+\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]\times 6$$
$$=\frac{11}{27}$$

Quelques élèves ont trouvé $\frac{11}{81}$ en multipliant par $\frac{1}{3}$.
Ils ont oublié la condition « Le joueur A gagne la première partie ».
Il n'y a pas à multiplier par $\frac{1}{3}$.

III.

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Un jeu se déroule en plusieurs parties.
Chaque partie consiste à lancer deux fois de suite le dé. On note chaque fois le numéro porté par la face supérieure.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On suppose dans cette partie que le dé n'est pas pipé.
Pour chaque partie, on effectue le produit des numéros obtenus.
Compléter l'algorithme ci-dessous qui pour n parties, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, affiche en sortie la fréquence de celles pour lesquelles on obtient un résultat strictement supérieur à 2.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i variant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 6
  y prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 6
  p prend la valeur xy
  Si $p > 2$
    Alors a prend la valeur $a+1$
  FinSi
FinPour

Sortie :

Afficher $\frac{a}{n}$

Une fois que l'on est sorti de la boucle « Pour », la valeur de a correspond au nombre de fois où l'on a obtenu un résultat strictement supérieur à 2.
La valeur de n ne change pas au cours de l'algorithme.

En sortie de l'algorithme, la fréquence du nombre des parties où l'on a obtenu un résultat strictement supérieur à 2 est égale à $\frac{a}{n}$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que le dé est pipé.
Les probabilités d'apparition de chaque face en un lancer sont données dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,2	0,1	0,1	0,3	0,1	0,2

1°) Quelle est la probabilité que le produit des deux numéros obtenus en une partie soit impair ?

0,16 (un seul résultat sous forme décimale)

1[ère] méthode :
On écrit tous les couples correspondant à un produit impair : $(1;1)$, $(1;3)$, $(1;5)$, $(3;1)$ etc.
Éventuellement, on fait un arbre de possibilités puis on écrit tous les chemins correspondant à l'événement « Le produit des deux numéros est impair ».
Il ne faut pas oublier :
- que les couples $(1;3)$ et $(3;1)$ sont différents ;
- d'écrire les couples formés du même numéro (qui doit être impair).
La probabilité de chaque chemin s'obtient par produit.
On additionne ensuite les résultats.
On peut aussi écrire tous les couples qui donnent un produit impair.

2[e] méthode :
On sait que le produit de deux entiers est impair si et seulement si les deux entiers sont impairs.
On note A l'événement : « Obtenir un numéro impair en un lancer ».
D'après le tableau donnant les probabilités des numéros des faces, on a $P(\mathrm{A}) = 0,4$.
La probabilité cherchée est égale à $\left[P(\mathrm{A})\right]^2 = 0,4^2 = 0,16$ par principe multiplicatif puisque les deux lancers sont des épreuves indépendantes.

2°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le même numéro en une partie ?

0,2 (un seul résultat sous forme décimale)

La probabilité cherchée s'obtient en calculant
$P(1)\times P(1)+P(2)\times P(2)+P(3)\times P(3)+P(4)\times P(4)+P(5)\times P(5)+P(6)\times P(6)$ soit
$\left[P(1)\right]^2+\left[P(2)\right]^2+\left[P(3)\right]^2+\left[P(4)\right]^2+\left[P(5)\right]^2+\left[P(6)\right]^2$.

3°) On effectue n parties à la suite de manière indépendante, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Quel est le plus petit entier naturel n tel que la probabilité d'obtenir au moins une fois les mêmes numéros lors d'une partie soit supérieure ou égale à 0,99 ?

21 (un seul résultat sans égalité)

On cherche d'abord la probabilité d'obtenir au moins une fois les mêmes numéros lors d'une partie.

On va passer par l'événement contraire : le contraire « au moins une fois » est « jamais » ou « aucune fois ».

Le contraire de l'événement « obtenir au moins une fois les mêmes numéros lors d'une partie » est « obtenir à chaque partie deux numéros différents ».

La probabilité d'obtenir deux numéros différents lors d'une partie est $1-0,2=0,8$ donc la probabilité d'obtenir deux numéros différents à chaque partie est $0,8^n$ (principe multiplicatif par indépendance des parties).

La probabilité d'obtenir au moins une fois deux fois les mêmes numéros lors d'une partie est égale à $p_n=1-0,8^n$.

On cherche $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $p_n\geqslant 0,99$ soit $1-0,8^n\geqslant 0,99$ (1).

On ne sait pas résoudre cette inéquation par le calcul en 1ère.

On procède par essais successifs sur la calculatrice en remplaçant *n* par des valeurs de plus en plus grandes jusqu'à trouver la plus petite valeur de *n* pour laquelle l'inégalité (1) est vérifiée.

On ne peut trouver « à la main » la valeur de *n*. Ce serait trop long. On utilise la calculatrice.

On trouve $n=21$.

On peut définir la fonction $f : x \mapsto 1-0,8^x$ et faire un tableau de valeurs en choisissant $x=0$ pour valeur de début et un pas de 1 sur calculatrice.

Consigne valable pour les exercices IV, V, VI :

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$ et on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.

IV. Question de cours

Soit *x* et *y* deux réel et M et N leurs images sur le cercle $\mathscr{C}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur *x* et *y* pour que les points M et N soient confondus.

On répondra par une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter :
« M et N sont confondus si et seulement si …. ».

M et N sont confondus si et seulement si $x-y=2k\pi$ avec *k* entier relatif.

V.

Donner sans justifier trois réels associés au point B'.

$$-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{7\pi}{2}$$ (écrire les réels séparés par des points-virgules)

Il s'agit bien de trois réels deux à deux distincts qui ont la même image B'.

On lit graphiquement $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'}\right)=-\frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'}\right)=\frac{3\pi}{2}$.

On peut en donner d'autres mesures : $\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{9\pi}{2}$…. Il suffit d'ajouter un multiple de 2π.

VI.

Soit *x* un réel quelconque et M son image sur le cercle $\mathscr{C}$.

On note M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses et M'' le point diamétralement opposé à M sur $\mathscr{C}$.

1°) Compléter par un réel en fonction de *x* les phrases suivantes.

- M' est l'image de $-x$ sur $\mathscr{C}$.
- M'' est l'image de $\pi+x$ sur $\mathscr{C}$.

On fait une figure pour visualiser la situation.

2°) À l'aide des propriétés sur les angles orientés, déterminer une mesure en radians en fonction de *x* des angles $\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OM}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM'}\right)$, $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction de *x*.
Pour chaque angle orienté on attend les calculs puis une phrase réponse sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Une mesure en radians de l'angle orienté … est … . »

On demande des calculs. Ces calculs utilisent la relation de Chasles pour les angles orientés.

$$\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$$

On sait que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires de sens contraires donc π est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OA}\right)$. On peut aussi dire que $-\pi$ est une mesure en radians de cet angle orienté.

$$\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OM}\right)=\pi+x$$

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OM}\right)$ est $\pi+x$.

On a $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM'}\right)$.

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$ est $-\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$).

Donc $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM'}\right)=-\frac{\pi}{2}-x$

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM'}\right)$ est $-\frac{\pi}{2}-x$.

$$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=-\,x-x$$

$$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=-\,2x$$

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ est $-\,2x$.

Cette mesure peut se retrouver graphiquement.