1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 11 janvier 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………….…………

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x+\dfrac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) • Écrire ci-dessous l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq 0$ sous forme « brute » (c'est-à-dire sans arranger le résultat).

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = $ ……………………………………… (un seul résultat)

• Écrire ci-dessous l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq 0$ sous forme d'un seul quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = $ ……………………………………… (un seul résultat)

2°) Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en …………………………………………… [écrire la (ou les) valeur(s) de x, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier avec soin le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera les variations avec ces extremums.

Faire deux phrases utilisant les mots maximum et minimum sur le modèle suivant :

« Le maximum de f sur l'intervalle …….. (écrire l'intervalle) est égal à … et est atteint pour $x = ...$ ».

…..………………………………………………………………………………………………………

…..………………………………………………………………………………………………………

3°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

………………….. (un seul résultat sans égalité)

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 1.

………………….. (résultats sans égalités, séparés par un point-virgule)

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans tout l'exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On définit une suite de nombres en choisissant le nombre 0 pour nombre de départ et en calculant les images successives par la fonction f.

La première étape consiste à calculer l'image de 0 par f. On obtient $f(0) = \sqrt{0^2+1} = 1$.

La deuxième étape consiste à recommencer avec 1. On calcule l'image de 1 par f. On obtient $f(1) = \sqrt{2}$.

On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction f.
On note u_0, u_1, u_2, u_4, u_5, … les nombres de la suite obtenus successivement par le procédé préalablement décrit.
On a donc $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2}$ etc.
1°) À l'aide de la commande « rép » de la calculatrice, donner la valeur exacte du onzième nombre de la suite c'est-à-dire de u_{10} (0 est le premier nombre de la suite). Répondre par une égalité de la forme $u_{10} = ...$.

……………………… (une seule égalité)

2°) Pour n entier naturel quelconque, conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

……………………… (une seule égalité)

3°) Quel est le premier entier naturel n pour lequel $u_n \geqslant 10$?

……………. (une seule valeur, sans égalité)

Dans les exercices **III** et **IV**, on se place dans le plan orienté *P*.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de *P* tels que $-\dfrac{19\pi}{7}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

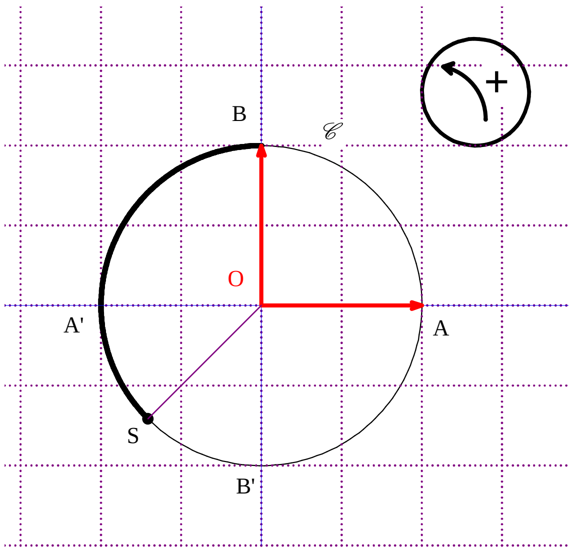
………… (un seul résultat sans égalité)

2°) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de *P* tels que $\dfrac{1000\pi}{11}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

………… (un seul résultat sans égalité)

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 2°) 2 points)

Le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$.



1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)$?

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)$ est égale à ……………. .

2°) Quelle est la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[10\pi\,;12\pi]$?

La mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OS}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[10\pi\,;12\pi]$ est égale à ……………. .

3°) Quel est l'ensemble des réels de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image appartient à l'arc $\overset{\frown}{BS}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

……………………………………..……… (une seule réponse, sans égalité)

V. (2 points)

On considère une boîte qui a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté *x* cm et dont la hauteur *y* cm.
On sait que la boîte a pour volume 500 cm^3.
Exprimer *y* en fonction de *x*.
Exprimer ensuite l'aire totale $\mathscr{A}$ de la boîte exprimée en cm^2 en fonction de *x*.

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

……………………………………………………………………………..……………………………………………………

Corrigé du contrôle du 11-1-2019

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) • Écrire ci-dessous l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq 0$ sous forme « brute » (c'est-à-dire sans arranger le résultat).

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \quad \text{(un seul résultat)}$$

• Écrire ci-dessous l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq 0$ sous forme d'un seul quotient.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2} \quad \text{(un seul résultat)}$$

2°) Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$ [écrire la (ou les) valeur(s) de *x*, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier avec soin le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera les variations avec ces extremums.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2$		+	0 num	−	|	−	0 num	+	
Signe de x^2		+		+	0 déno	+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0 num	−	||	−	0 num	+	
Variations de f		↗	$-2\sqrt{2}$	↘	||	↘	$2\sqrt{2}$	↗	

On a une double barre à partir du signe de $f'(x)$.

Faire deux phrases utilisant les mots maximum et minimum sur le modèle suivant :

« Le maximum de *f* sur l'intervalle …….. (écrire l'intervalle) est égal à … et est atteint pour $x = ...$ ».

Le maximum de *f* sur l'intervalle $\left]-\infty\,;+0\right[$ est égal à $-2\sqrt{2}$ et est atteint pour $x = -\sqrt{2}$.

Le minimum de *f* sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ est égal à $2\sqrt{2}$ et est atteint pour $x = \sqrt{2}$.

3°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente *T* à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

-5 (un seul résultat sans égalité)

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -1.

1 ; -1 (résultats sans égalités, séparés par un point-virgule)

On résout l'équation $f'(x) = -1$.

II.

Dans tout l'exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On définit une suite de nombres en choisissant le nombre 0 pour nombre de départ et en calculant les images successives par la fonction *f*.

La première étape consiste à calculer l'image de 0 par *f*. On obtient $f(0) = \sqrt{0^2+1} = 1$.

La deuxième étape consiste à recommencer avec 1. On calcule l'image de 1 par *f*. On obtient $f(1) = \sqrt{2}$.

On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction *f*.
On note u_0, u_1, u_2, u_4, u_5, … les nombres de la suite obtenus successivement par le procédé préalablement décrit.
On a donc $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2}$ etc.

1°) À l'aide de la commande « rép » de la calculatrice, donner la valeur exacte du onzième nombre de la suite c'est-à-dire de u_{10} (0 est le premier nombre de la suite). Répondre par une égalité de la forme $u_{10} = ...$.

$u_{10} = \sqrt{10}$ (une seule égalité)

2°) Pour *n* entier naturel quelconque, conjecturer une expression de u_n en fonction de *n*.

$u_n = \sqrt{n}$ (une seule égalité)

3°) Quel est le premier entier naturel *n* pour lequel $u_n \geqslant 10$?

100 (une seule valeur, sans égalité)

On cherche le plus petit entier naturel *n* tel que $\sqrt{n} \geqslant 10$.

Cette inégalité est équivalente à $n \geqslant 100$ (en élevant au carré car les deux membres de l'inégalité sont positifs ou nuls).

Dans les exercices **III** et **IV**, on se place dans le plan orienté P.

III.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de P tels que $-\dfrac{19\pi}{7}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

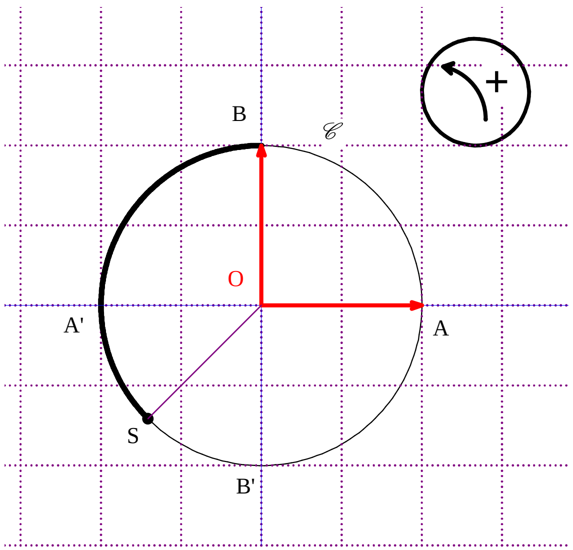
$$-\frac{5\pi}{7} \text{ (un seul résultat sans égalité)}$$

2°) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de P tels que $\dfrac{1000\pi}{11}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

$$\frac{10\pi}{11} \text{ (un seul résultat sans égalité)}$$

IV.

Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A'}(-1\,;0)$, $\text{B'}(0\,;-1)$.

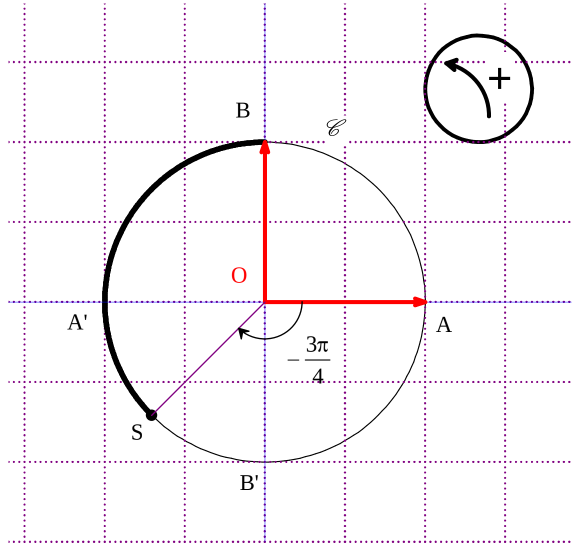


1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OS}}\right)$?

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OS}}\right)$ est égale à $-\dfrac{3\pi}{4}$.

C'est la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OS}}\right)$ qui correspond à l'angle géométrique saillant $\widehat{\text{AOS}}$.

Marquer cette mesure sur le cercle trigonométrique.



2°) Quelle est la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OS}}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[10\pi\,;12\pi]$?

La mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OS}}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[10\pi\,;12\pi]$ est égale à $\dfrac{45\pi}{4}$.

On peut utiliser une droite graduée (droite réelle) une « frise » comme disent les élèves.

3°) Quel est l'ensemble des réels de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ dont l'image appartient à l'arc $\overset{\frown}{\text{BS}}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

$$\left[-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right] \text{ (une seule réponse, sans égalité)}$$

V.

On considère une boîte qui a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la base est un carré de côté x cm et dont la hauteur y cm.
On sait que la boîte a pour volume 500 cm^3.
Exprimer y en fonction de x.
Exprimer ensuite l'aire totale $\mathscr{A}$ de la boîte exprimée en cm^2 en fonction de x.

On a $x^2 y = 500$ donc $y = \dfrac{500}{x^2}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 2x^2 + 4xy \\ &= 2x^2 + 4x \times \frac{500}{x^2} \\ &= 2x^2 + \frac{2000}{x}\end{aligned}$$