1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 14 décembre 2018 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x - 4\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) =$ ……………………………… (un seul résultat)

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

………

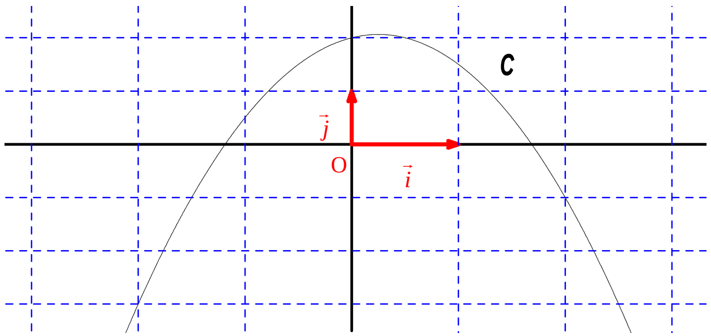
………

………

………

II. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2 + \dfrac{x}{2} + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) =$ ……………………………… (un seul résultat)

2°) On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives – 2 et 0.
Préciser les coefficients directeurs des tangentes T et T' respectivement en A et B à $\mathcal{C}$.
Donner la réponse puis présenter les calculs sur les lignes ci-dessous.
Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

……… (une seule réponse sans égalité) ……… (une seule réponse sans égalité)

…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………
…………………………………	…………………………………

3°) Quelle est l'abscisse du point E de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $5x + y + 1 = 0$?

………… (une seule réponse sans égalité)

Écrire sur les lignes ci-dessous l'équation qui permet de résoudre la question puis présenter la résolution de cette équation.

………

………

………

………

………

………

………

………

4°) Déterminer une fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait : $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

……………………………………

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Calculer $f'(x)$. On attend un résultat simplifié avec numérateur sous forme développée réduite.

Il est demandé de ne pas développer le dénominateur et de faire les barres de fractions à la règle.

……

……

……

……

……

……

……

IV. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points)

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de la fonction $f : x \mapsto ax + \dfrac{b}{x-4}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ où a et b sont deux réels, b étant non nul.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$ $f'(x) =$ ……………………………… (un seul résultat)

Présenter le calcul sur les lignes ci-dessous :

……

……

……

……

2°) On sait que $\mathcal{C}$ vérifie les conditions C_1 et C_2 suivantes :

- C_1 : $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0\,;-1)$;
- C_2 : la tangente au point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 1.

Déterminer les valeurs de a et b.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 14-12-2018

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto x - 4\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (un seul résultat)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 - 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

On ne peut pas simplifier plus.
On laisse la racine carrée au dénominateur.

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

On cherche le réel x strictement positif tel que $f'(x) = 0 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$$1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$1 = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$1 \times \sqrt{x} = 2$ (produit en croix ; ligne facultative à cause du produit par 1 que l'on n'écrit pas)

$\sqrt{x} = 2$

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 2^2$ (on élève les deux membres au carré ; ligne facultative)

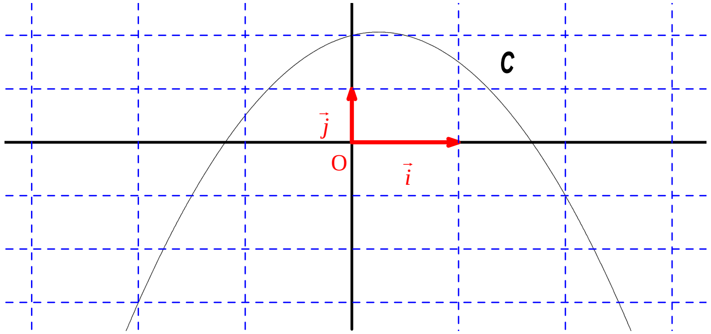
$x = 4$ (valeur qui convient car 4 est strictement positif)

Le point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses a pour abscisse 4.

On peut vérifier graphiquement le résultat en traçant la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice.
$\text{X} = 4$
$y = -8\text{E}^{-}9\text{X} + -3{,}999999968$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2 + \dfrac{x}{2} + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2x + \dfrac{1}{2}$ (un seul résultat)

Pour dériver commodément, on effectue la réécriture $f(x) = -x^2 + \dfrac{1}{2}x + 2$.

f est une fonction polynôme sur second degré donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives – 2 et 0.
Préciser les coefficients directeurs des tangentes T et T' respectivement en A et B à $\mathcal{C}$.
Donner la réponse puis présenter les calculs sur les lignes ci-dessous.
Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

$\dfrac{9}{2}$ (une seule réponse sans égalité)

$$f'(-2) = -2 \times (-2) + \frac{1}{2}$$
$$= 4 + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{9}{2}$$

$\dfrac{1}{2}$ (une seule réponse sans égalité)

$$f'(0) = -2 \times 0 + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

On peut vérifier le résultat graphiquement grâce à la calculatrice.

On pourrait éventuellement tracer les deux tangentes sur le graphique.

3°) Quelle est l'abscisse du point E de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $5x + y + 1 = 0$?

$\dfrac{11}{4}$ (une seule réponse sans égalité)

Écrire sur les lignes ci-dessous l'équation qui permet de résoudre la question puis présenter la résolution de cette équation.

D pour équation réduite $y=-5x-1$ donc *D* a pour coefficient directeur – 5.

L'abscisse du point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à *D* est la solution de l'équation $f'(x)=-5 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$-2x+\frac{1}{2}=-5$

$-2x=-5-\frac{1}{2}$

$-2x=-\frac{11}{2}$

$x=\frac{11}{4}$ (multiplication des deux membres par $-\frac{1}{2}$)

Le point E de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite *D* a pour abscisse $\frac{11}{4}$.

4°) Déterminer une fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel *x*, on ait : $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

$$\mathrm{F}(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+2x$$

On utilise à nouveau la réécriture du début $f(x)=-x^2+\frac{1}{2}x+2$.

Il faut se référer aux dérivées des fonctions de référence.

On sait que $(x^3)'=3x^2$ (notation à éviter cependant) donc une fonction dont la dérivée est $x\mapsto x^2$ est la fonction $x\mapsto\frac{1}{3}x^3$.

On sait que $(x^2)'=2x$ donc une fonction dont la dérivée est $x\mapsto x$ est la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}x^2$.

On sait que $(x)'=1$ donc une fonction dont la dérivée est $x\mapsto 2$ est la fonction $x\mapsto 2x$.

Donc une fonction dont la dérivée est égale à f est la fonction

$\mathrm{F}:x\mapsto -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x^2+2x=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+2x=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+2x$.

On peut vérifier que $\mathrm{F}'=f$ en dérivant l'expression de F que l'on vient de trouver.

Vocabulaire : On dit que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

De manière générale, la fonction $x\mapsto -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+2x+k$ où *k* est un réel quelconque a pour dérivée *f*.

La notion de primitive sera retravaillée en Terminale.

III.

On considère la fonction $f:x\mapsto\frac{2x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Calculer $f'(x)$. On attend un résultat simplifié avec numérateur sous forme développée réduite.
Il est demandé de ne pas développer le dénominateur et de faire les barres de fractions à la règle.

f est une fonction homographique donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \quad f'(x)=\frac{2\times(x-1)-1\times(2x+1)}{(x-1)^2}$ (formule de dérivée d'un quotient)

$=\frac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}-1}{(x-1)^2}$

$=\frac{-3}{(x-1)^2}$ (ligne facultative)

$=-\frac{3}{(x-1)^2}$

IV.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ de la fonction $f:x\mapsto ax+\frac{b}{x-4}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ où *a* et *b* sont deux réels, *b* étant non nul.

1°) Compléter : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{4\} \quad f'(x)=a-\frac{b}{(x-4)^2}$ (un seul résultat)

Présenter le calcul sur les lignes ci-dessous :

La technique la plus commode consiste à effectuer la réécriture $f(x)=a\times x+b\times\frac{1}{x-4}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{4\} \quad f'(x)=a\times1+b\times\left(-\frac{1}{(x-4)^2}\right)$ (pour dériver $\frac{1}{x-4}$, on applique la formule $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$)

$=a-\frac{b}{(x-4)^2}$

2°) On sait que $\mathcal{C}$ vérifie les conditions C_1 et C_2 suivantes :

- C_1 : $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(0\,;-1)$;
- C_2 : la tangente au point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 1.

Déterminer les valeurs de *a* et *b*.

C_1 se traduit par $f(0)=-1$ ce qui donne $a\times 0+\dfrac{b}{0-4}=-1$ soit $-\dfrac{b}{4}=-1$ d'où $b=4$ (simplification des deux moins de part et d'autre et multiplication des deux membres par 4 ou plus simplement multiplication des deux membres par – 4).

C_2 se traduit par $f'(2)=1$ ce qui donne $a-\dfrac{4}{(2-4)^2}=1$ soit $a-1=1$ d'où $a=2$.

On obtient $a=2$ et $b=4$. Ainsi f a pour expression $f(x)=2+\dfrac{4}{x-4}$.