1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 7 décembre 2018 (50 min)

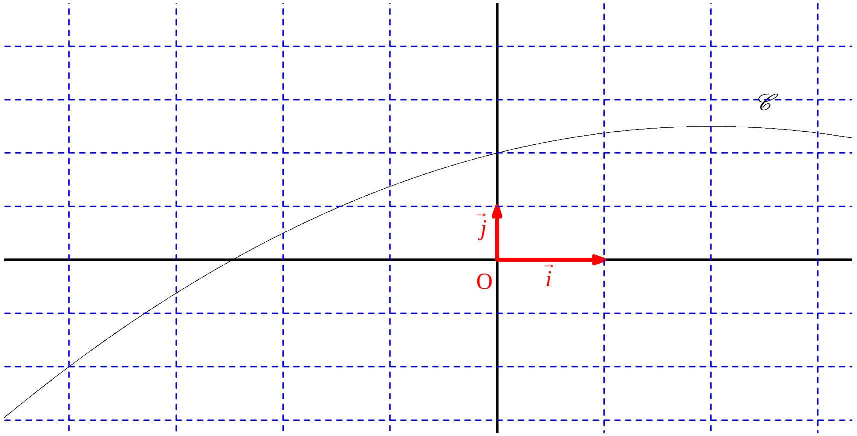
Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

Il est demandé que les traits de fraction pour les différents quotients soient faits à la règle.

I. (2 points)

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction *f* dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On sait que *f* est dérivable en 0 et que le nombre dérivé de *f* en 0 est égal à $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire $f\,'(0)=\frac{1}{2}$).
On note A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées.
Tracer la tangente *T* à $\mathscr{C}$ en A sur le graphique ci-dessous.



II. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On sait que $\mathscr{C}$ passe par les points $\text{A}(1\,;-1)$ et $\text{B}(-2\,;-3)$.

1°) On sait que la tangente *T* à $\mathscr{C}$ en A passe par le point $\text{E}(5\,;4)$.
Compléter l'égalité :

$$f\,'(1)=\text{.......}$$

2°) On donne $f\,'(-2)=-1$.
Écrire l'équation réduite de la tangente $T\,'$ en B à $\mathscr{C}$.

……………………………….. (une seule réponse sous la forme $y=\ldots$)

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit *h* un réel quelconque non nul.

Compléter les égalités ci-dessous :

$f(0)=\text{......}$ (un seul résultat)

$f(h)=\text{............................}$ (un seul résultat)

$f(h)-f(0)=\text{............................}$ (un seul résultat)

$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\text{............................}$ (un seul résultat)

2°) Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque *h* tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers …… .

En déduire que *f* est dérivable en 0 et donner le nombre dérivé de *f* en 0. On répondra par une phrase.

………

………

………

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Bonus à faire sur une feuille à part (1 point) :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1 \quad (\text{E})$.

IV. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x} - 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Soit h un réel quelconque non nul.

Compléter les égalités ci-dessous :

$f(1) =$ .... (un seul résultat)

$f(1+h) =$ .... (un seul quotient avec numérateur simplifié)

$f(1+h) - f(1) =$ .... (un seul quotient avec numérateur simplifié)

$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} =$ .... (un seul quotient simplifié)

2°) Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers …… .

En déduire que f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1. On répondra par une phrase.

……

……

……

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

3°) La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-contre est la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. Tracer la tangente T à $\mathscr{C}$ en A sur le graphique ci-contre.

V. (4 points : 2 points + 2 points)

Soit ABCD un parallélogramme. On note E le symétrique de B par rapport à C.

Dans tout l'exercice, on rapporte le plan au repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

Faire une figure dans l'espace vide ci-dessous en utilisant la disposition classique et représenter les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ de manière à faire apparaître le repère sur la figure.

Écrire sur une même ligne les coordonnées des points A, B, C, D, E sans justifier.

……

Écrire ci-dessous une équation de chacune des droites (BC) et (AE).

(BC) : ……………………..

(AE) : ……………………..

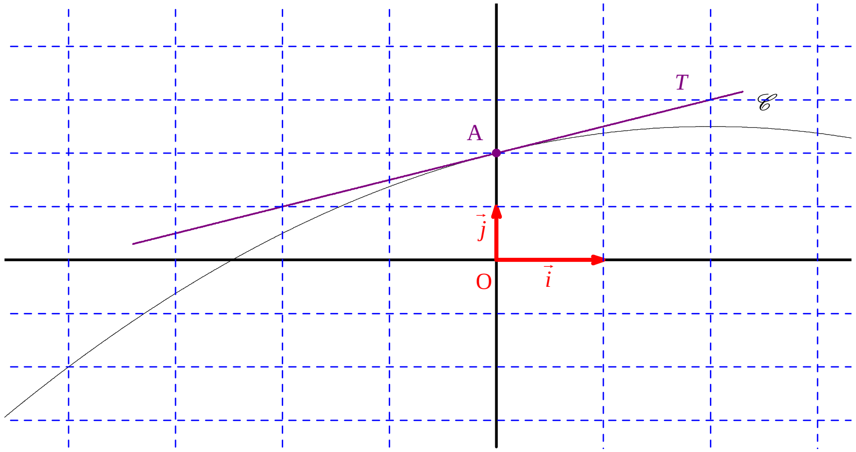
Corrigé du contrôle du 7-12-2018

I.

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On sait que f est dérivable en 0 et que le nombre dérivé de f en 0 est égal à $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire $f'(0)=\frac{1}{2}$).

On note A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées.

Tracer la tangente T à $\mathscr{C}$ en A sur le graphique ci-dessous.



La tangente T admet le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ pour vecteur directeur.

Pour la construction, il est préférable d'utiliser le vecteur $2\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$.

II.

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On sait que $\mathscr{C}$ passe par les points $\text{A}(1\,;-1)$ et $\text{B}(-2\,;-3)$.

1°) On sait que la tangente T à $\mathscr{C}$ en A passe par le point $\text{E}(5\,;4)$.

Compléter l'égalité :

$$f'(1)=\frac{5}{4}$$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de T. Comme T passe par les points A et E, on a $f'(1)=\frac{y_\text{E}-y_\text{A}}{x_\text{E}-x_\text{A}}$.

On remplace ensuite les coordonnées de A et E par leurs valeurs.

2°) On donne $f'(-2)=-1$.

Écrire l'équation réduite de la tangente T' en B à $\mathscr{C}$.

$y=-x-5$ (une seule réponse sous la forme $y=\ldots$)

T' passe par B et a pour coefficient directeur – 1 donc une équation de T' s'écrit $y=-(x+2)-3$ (formule $y=m(x-x_\text{B})+y_\text{B}$) qui donne $y=-x-5$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit h un réel quelconque non nul.

Compléter les égalités ci-dessous :

$f(0)=0$ (un seul résultat)

$f(h)=h\sqrt{h^2+1}$ (un seul résultat)

$f(h)-f(0)=h\sqrt{h^2+1}$ (un seul résultat)

$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\sqrt{h^2+1}$ (un seul résultat)

- $\frac{f(h)-f(1)}{h}=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ représente le taux de variation de f entre 0 et h.
- On ne peut pas enlever le h qui figure au dénominateur dans le dernier résultat.

2°) Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers 1.

En déduire que f est dérivable en 0 et donner le nombre dérivé de f en 0. On répondra par une phrase.

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable en 0 et le nombre dérivé de f en 0 est égal à 1 (ce que l'on peut écrire $f'(0)=1$).

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

$$\frac{\text{d}}{\text{dX}}\left(\text{X}\sqrt{\text{X}^2+1}\right)\Big|_{\text{X}=0}$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient l'affichage 1,0000005.
Le résultat est cohérent avec notre calcul.
La dernière décimale affichée est incorrecte. Elle est liée au mode de calcul du nombre dérivé par la calculatrice qui est approximatif.

Bonus à faire sur une feuille à part :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1 \quad (\mathrm{E})$.

Cette équation s'écrit $x\sqrt{x^2+1}=1$. Elle est successivement équivalente à :

$\left(x\sqrt{x^2+1}\right)^2=1^2$ et $x\sqrt{x^2+1}\geqslant 0$

$x^2\left(x^2+1\right)=1$ et $x\geqslant 0$

$x^4+x^2-1=0$ et $x\geqslant 0$

Pour résoudre l'équation $x^4+x^2-1=0$, on pose $X=x^2$.
L'équation s'écrit alors $X^2+X-1=0$.
Les racines sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
L'équation $x^4+x^2-1=0$ est donc équivalente aux lignes suivantes :
$x^2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (impossible) ou $x^2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
$x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Compte tenu de la condition $x\geqslant 0$, on en déduit que la seule solution de (E) est $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

On vérifie aisément à l'aide de la commande de la touche $\boxed{\text{résol}}$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x}-1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Soit h un réel quelconque non nul.

Compléter les égalités ci-dessous :

$f(1)=-\dfrac{1}{2}$ (un seul résultat)

$f(1+h)=\dfrac{-1-2h}{2(1+h)}$ (un seul quotient avec numérateur simplifié)

$f(1+h)-f(1)=-\dfrac{h}{2(1+h)}$ (un seul quotient avec numérateur simplifié)

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=-\dfrac{1}{2(1+h)}$ (un seul quotient simplifié)

- $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ représente le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.

- Il n'y a pas moyen d'enlever le h qui figure au dénominateur dans le dernier résultat.

2°) Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

En déduire que f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1. On répondra par une phrase.

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est égal à $-\dfrac{1}{2}$ (ce que l'on peut écrire $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$).

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

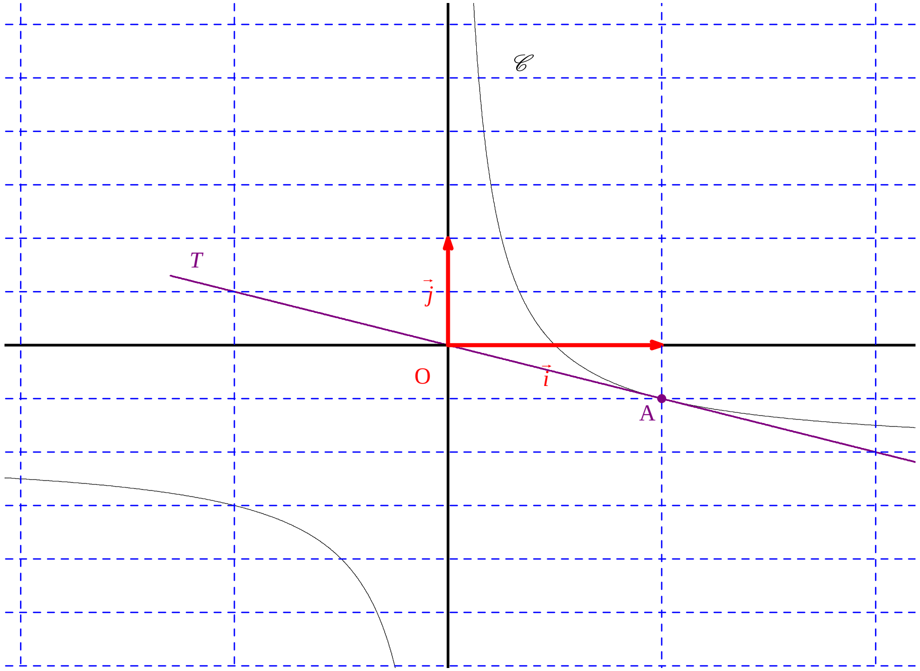
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\left(\frac{1}{2\mathrm{X}}-1\right)\Big|_{\mathrm{X}=1}$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient l'affichage – 0,5000005.
Le résultat est cohérent avec notre calcul.
La dernière décimale affichée est incorrecte. Elle est liée au mode de calcul du nombre dérivé par la calculatrice qui est approximatif.

3°) La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-contre est la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. Tracer la tangente T à $\mathscr{C}$ en A sur le graphique ci-contre.

T est la droite passant par A et de coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

Elle passe par l'origine O du repère.

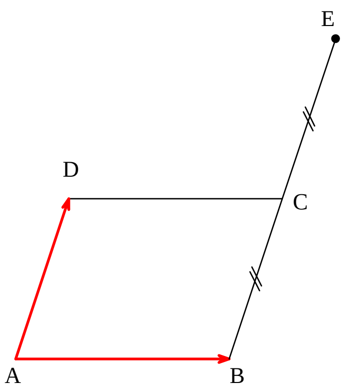


On peut vérifier à l'aide de la calculatrice (commande de tracé d'une tangente).

V.

Soit ABCD un parallélogramme. On note E le symétrique de B par rapport à C.
Dans tout l'exercice, on rapporte le plan au repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

Faire une figure dans l'espace vide ci-dessous en utilisant la disposition classique et représenter les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ de manière à faire apparaître le repère sur la figure.



On fait une figure codée en adoptant une disposition des points qui fasse apparaître la disposition traditionnelle d'un repère du plan : (AB) horizontale, A à gauche de B, C et D au-dessus, l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ aigu, sans aucune particularité de longueur ni d'angle (en particulier, ABCD ne doit pas être un rectangle ni a fortiori un carré).

Le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$ est donc oblique.
Le point A est l'origine du repère.
La droite (AB) est l'axe des abscisses du repère.
La droite (AD) est l'axe des ordonnées du repère.
On peut éventuellement faire apparaître le maillage correspondant au repère.

Écrire sur une même ligne les coordonnées des points A, B, C, D, E sans justifier.

$\text{A}\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ $\quad\text{B}\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ $\quad\text{C}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ $\quad\text{D}\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ $\quad\text{E}\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$

Écrire ci-dessous une équation de chacune des droites (BC) et (AE).

(BC) : $x = 1$ $\qquad$ (AE) : $y = 2x$

La droite (BC) est parallèle à la droite (AB) car ABCD est un parallélogramme.
Donc (BC) admet une équation de la forme $x = k$.
Comme B et C ont pour abscisse 1, la valeur de k est égale à 1.

La droite (AE) passe par le point A donc son ordonnée à l'origine est nulle.
Son équation réduite est donc de la forme $y = mx$.
On calcule le coefficient directeur m par la formule $m = \dfrac{y_{\text{E}} - y_{\text{A}}}{x_{\text{E}} - x_{\text{A}}} = \dfrac{2-0}{1-0} = 2$.
(AE) a donc pour équation réduite $y = 2x$.