$1^{\text{ère}}$ **S2**

Contrôle du vendredi 23 novembre 2018 (60 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points)

Développer et réduire l'expression $\text{A}=3-\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

……

……

……

……

……

……

……

II. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto (x-m)^2+1$.

1°) Faire le tableau de variations de f_m.

2°) On se place dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan. On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m et Γ la parabole d'équation $y=x^2$.

Compléter les phrases suivantes.

- $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des ordonnées au point A $\left| \begin{array}{l} x_{\text{A}}=\dots\dots\dots \\ y_{\text{A}}=\dots\dots\dots \end{array} \right.$.

- $\mathscr{C}_m$ a pour sommet S $\left| \begin{array}{l} x_{\text{S}}=\dots\dots\dots \\ y_{\text{S}}=\dots\dots\dots \end{array} \right.$.

- $\mathscr{C}_m$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $\vec{u}$ $\left| \begin{array}{l} x_{\vec{u}}=\dots\dots\dots \\ y_{\vec{u}}=\dots\dots\dots \end{array} \right.$.

- $\mathscr{C}_m$ coupe Γ au point K $\left| \begin{array}{l} x_{\text{K}}=\dots\dots\dots \\ y_{\text{K}}=\dots\dots\dots \end{array} \right.$ (on suppose que m est non nul).

3°) Quel est le signe de $f_m(x)$? Répondre sous la forme d'une phrase quantifiée en justifiant brièvement.

……

……

4°) Faire le tableau de variations de la fonction $g_m : x \mapsto \dfrac{1}{(x-m)^2+1}$.

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On note $\mathscr{C}$ la parabole d'équation $y=(x-1)^2$ dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

On répondra après avoir cherché au brouillon.
Seules les réponses correctes complètes seront prises en compte.

1°) Soit m un réel strictement positif. Quelles sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite D_m d'équation $y=m$?

………………………………….. (répondre directement sans écrire d'égalités)

2°) Quelles sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite L d'équation $y=3-2x$?

………………………………….. (répondre directement sans écrire d'égalités)

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 2 points)

Dans un jeu, on dispose d'une pièce non truquée.
Le joueur lance deux fois cette pièce et l'on note chaque fois le côté de la face supérieure.
Soit m un réel strictement positif fixé.
• S'il obtient deux fois le côté pile, il reçoit $2m$ € ;
• Dans le cas contraire, il perd m €.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 2m$ et $x_2 = -m$.

Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où P désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

x_i	$2m$	$-m$
$P(\text{X} = x_i)$		

Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de m.
On détaillera uniquement sur les lignes ci-dessous le calcul de la variance (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »).

$\text{E}(\text{X}) =$ ....

$\text{V}(\text{X}) =$ ....

…..……

…..……

…..……

…..……

…..……

…..……

…..……

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Une urne contient quatre boules portant respectivement les numéros 1, 2, 3 et 4. On tire quatre boules avec remise.
On note chaque fois le numéro de la boule tirée.
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité P.
On donnera tous les résultats des probabilités sous forme de fractions irréductibles.
On écrira chaque fois une seule réponse sans égalité.

1°) Quel est le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire ?

………..

2°) Calculer la probabilité qu'à l'issue des quatre tirages on ait obtenu chaque fois la même boule.

………..

3°) Calculer la probabilité qu'à l'issue des quatre tirages on ait obtenu au moins deux fois la même boule.

………..

4°) On désigne par X le nombre de numéros différents obtenus à l'issue des quatre tirages.
X est une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.
Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
$P(\text{X} = x_i)$	$\dfrac{1}{64}$	$\dfrac{21}{64}$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{3}{32}$

Calculer la probabilité d'obtenir au plus trois numéros différents à l'issue des quatre tirages dans l'urne.

………..

Présenter le calcul sur la ligne ci-dessous.

…..……

Corrigé du contrôle du 23-11-2018

I.

Développer et réduire l'expression $\mathrm{A} = 3 - \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Pour développer le produit $\left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, on utilise l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\mathrm{A} = 3 - \left[1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

$$= 3 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= 3 - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$= 2 + \frac{x^2}{2}$$

Il est inutile de mettre le résultat sous la forme $\frac{4 + x^2}{2}$.

II.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto (x - m)^2 + 1$.

1°) Faire le tableau de variations de f_m.

x	$-\infty$		m		$+\infty$
Variations de f_m		$\searrow$	1	$\nearrow$	

f_m est une fonction polynôme du second degré dont l'expression est donnée sous forme canonique.
f_m est strictement décroissante sur $]-\infty\,;m]$ et strictement croissante sur $[m\,;+\infty[$.

2°) On se place dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m et Γ la parabole d'équation $y = x^2$.

Compléter les phrases suivantes.

• $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des ordonnées au point $\mathrm{A}\left|\begin{array}{l} x_\mathrm{A} = 0 \\ y_\mathrm{A} = m^2 + 1 \end{array}\right.$.

• $\mathscr{C}_m$ a pour sommet $\mathrm{S}\left|\begin{array}{l} x_\mathrm{S} = m \\ y_\mathrm{S} = 1 \end{array}\right.$.

Les coordonnées de S sont connues grâce au tableau de variations.

• $\mathscr{C}_m$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $\vec{u}\left|\begin{array}{l} x_{\vec{u}} = m \\ y_{\vec{u}} = 1 \end{array}\right.$.

Il s'agit d'une application du cours : $\mathscr{C}_m$ est l'image de Γ par la translation de vecteur $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$.

On peut éventuellement s'aider d'un graphique.

• $\mathscr{C}_m$ coupe Γ au point $\mathrm{K}\left|\begin{array}{l} x_\mathrm{K} = \frac{m^2+1}{2m} \\ y_\mathrm{K} = \left(\frac{m^2+1}{2m}\right)^2 \end{array}\right.$ (on suppose que m est non nul).

L'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et Γ est la solution de l'équation $(x - m)^2 + 1 = x^2$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$\cancel{x^2} - 2mx + m^2 + 1 = \cancel{x^2}$ (on développe le premier membre en utilisant l'identité remarquable)

$2mx = m^2 + 1$

$x = \frac{m^2 + 1}{2m}$ (car $m \neq 0$ par hypothèse)

K a donc pour abscisse $x_\mathrm{K} = \frac{m^2+1}{2m}$.

$\mathrm{K} \in \Gamma$ donc l'ordonnée du point K est égale au carré de son abscisse soit $y_\mathrm{K} = (x_\mathrm{K})^2$ d'où $y_\mathrm{K} = \left(\frac{m^2+1}{2m}\right)^2$.

On ne développe pas ce dernier résultat.

3°) Quel est le signe de $f_m(x)$? Répondre sous la forme d'une phrase quantifiée en justifiant brièvement.

D'après l'expression, $f_m(x)$ est strictement positif pour tout réel x.

On fait une étude directe du signe de $f_m(x)$ à partir de l'expression initiale de $f_m(x)$.
L'expression développée de $f_m(x)$ ne permet pas de connaître son signe directement.
On n'utilise pas de règle particulière du cours.
On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m(x) = (x - m)^2 + 1$.

$(x-m)^2$ est positif ou nul.

Comme on ajoute 1 qui est strictement positif, l'expression est strictement positive.

4°) Faire le tableau de variations de la fonction $g_m : x \mapsto \dfrac{1}{(x-m)^2+1}$.

D'après la question précédente, g_m est définie sur $\mathbb{R}$.

On observe que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_m(x) = \dfrac{1}{f_m(x)}$ autrement dit g_m est l'inverse de f_m. Comme f_m est de signe constant, on en déduit que les variations de g_m sont contraires de celles de f_m. g_m est strictement croissante sur $]-\infty\,;m]$ et strictement décroissante sur $[m\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		m		$+\infty$
Variations de g_m		$\nearrow$	1	$\searrow$	

$g_m(1) = \dfrac{1}{f_m(1)} = \dfrac{1}{1} = 1$

III.

On note $\mathscr{C}$ la parabole d'équation $y=(x-1)^2$ dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On répondra après avoir cherché au brouillon.
Seules les réponses correctes complètes seront prises en compte.

1°) Soit m un réel strictement positif. Quelles sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite D_m d'équation $y=m$?

$1+\sqrt{m}$; $1-\sqrt{m}$ (répondre directement sans écrire d'égalités)

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite D_m sont les solutions de l'équation $(x-1)^2=m \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$x-1=\sqrt{m}$ ou $x-1=-\sqrt{m}$ (car $m>0$ par hypothèse)

$x=1+\sqrt{m}$ ou $x=1-\sqrt{m}$

Une mauvaise méthode consiste à développer le premier membre ce qui conduirait à une équation du second degré.
Il faudrait alors calculer le discriminant.

2°) Quelles sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite L d'équation $y=3-2x$?

$-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ (répondre directement sans écrire d'égalités)

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite L sont les solutions de l'équation $(x-1)^2=3-2x \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$x^2 \cancel{-2x}+1=3\cancel{-2x}$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

IV.

Dans un jeu, on dispose d'une pièce non truquée.
Le joueur lance deux fois cette pièce et l'on note chaque fois le côté de la face supérieure.
Soit m un réel strictement positif fixé.
• S'il obtient deux fois le côté pile, il reçoit $2m$ € ;
• Dans le cas contraire, il perd m €.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1=2m$ et $x_2=-m$.

Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où P désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

x_i	$2m$	$-m$
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

Il y a quatre résultats possibles pour l'expérience aléatoire : (pile, pile), (pile, face), (face, pile), (face, face).
On utilise un arbre de possibilités ou éventuellement un tableau.

Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de m.
On détaillera uniquement sur les lignes ci-dessous le calcul de la variance (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »).

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = -\dfrac{m}{4}$ $\qquad$ $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \dfrac{27m^2}{16}$

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 2m\times\dfrac{1}{4} - m\times\dfrac{3}{4}$

$= \dfrac{2m-3m}{4}$

$= -\dfrac{m}{4}$

On peut calculer la variance avec la formule de Koenig-Huygens.

$$V(X) = (2m)^2 \times \frac{1}{4} + (-m)^2 \times \frac{3}{4} - \left(-\frac{m}{4}\right)^2$$

$$= 4m^2 \times \frac{1}{4} + m^2 \times \frac{3}{4} - \frac{m^2}{16}$$

$$= \frac{4m^2}{4} + \frac{3m^2}{4} - \frac{m^2}{16}$$

$$= \frac{7m^2}{4} - \frac{m^2}{16}$$

$$= \frac{28m^2 - m^2}{16}$$

$$= \frac{27m^2}{16}$$

On peut aussi calculer la variance avec la formule de définition.

$$V(X) = \left(2m + \frac{m}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(-m + \frac{m}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}$$

$$= \left(\frac{9m}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(-\frac{3m}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}$$ (on réduit chaque parenthèse, on n'utilise par d'identité remarquable)

$$= \frac{81m^2}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{9m^2}{16} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{81m^2 + 27m^2}{64}$$

$$= \frac{108m^2}{64}$$

$$= \frac{\cancel{4} \times 27m^2}{\cancel{4} \times 16}$$

$$= \frac{27m^2}{16}$$

V.

Une urne contient quatre boules portant respectivement les numéros 1, 2, 3 et 4. On tire quatre boules avec remise.
On note chaque fois le numéro de la boule tirée.
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.
On donnera tous les résultats des probabilités sous forme de fractions irréductibles.
On écrira chaque fois une seule réponse sans égalité.

1°) Quel est le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire ?

$$4^4 = 256$$

2°) Calculer la probabilité qu'à l'issue des quatre tirages on ait obtenu chaque fois la même boule.

$$\frac{1}{64}$$

Le calcul s'effectue en faisant $\frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$.

Il faut noter que cette valeur se trouve dans le tableau donné à la question 4°). Il s'agit de $P(X = 1)$.

3°) Calculer la probabilité qu'à l'issue des quatre tirages on ait obtenu au moins deux fois la même boule.

$$\frac{29}{32}$$

L'événement « obtenir au moins deux fois la même boule » est le contraire de l'événement « obtenir quatre boules différentes ».
Ce dernier événement a pour probabilité $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4^4} = \frac{3}{32}$.
On calcule donc $1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}$.

4°) On désigne par X le nombre de numéros différents obtenus à l'issue des quatre tirages.
X est une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.
Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{32}$

Calculer la probabilité d'obtenir au plus trois numéros différents à l'issue des quatre tirages dans l'urne.

$$\frac{29}{32}$$

Présenter le calcul sur la ligne ci-dessous.

On cherche $P(X \leqslant 3) = \frac{1}{64} + \frac{21}{64} + \frac{9}{16} = \frac{1+21+36}{64} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$.

On retrouve le même résultat qu'à la question précédente. La raison tient au fait que l'événement « obtenir au moins deux fois la même boule » est l'événement « obtenir au plus quatre boules différentes ».