Encadrements de π

On part de l'inégalité $\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\quad \sin x < x < \tan x$.

En posant $x = \frac{\pi}{2^n}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on obtient $\sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n} < \tan\frac{\pi}{2^n}$ ce qui donne immédiatement $2^n \sin\frac{\pi}{2^n} < \pi < 2^n \tan\frac{\pi}{2^n}$.

On sait aussi que si $x \in [0\,;\pi]$, alors $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \cos\frac{\pi}{2^n}$.

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \\
&= \cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2^n}\right) \\
&= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}
\end{aligned}
$$

$$u_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{8}$$

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 0

Traitement :
Pour i variant de 2 à n **Faire**
    u prend la valeur $\sqrt{\dfrac{1+u}{2}}$
FinPour

Sortie :
Afficher $2^n\sqrt{1-u^2}$
Afficher $2^n\dfrac{\sqrt{1-u^2}}{u}$

Pour l'algorithme, on doit bien prendre $n \geqslant 2$.