1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 19 octobre 2018 (50 min)

Prénom : …………………………… **Nom :** ……………………………

Note : …. / 20

I. (3 points)

Le but de l'exercice est de déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont le produit est égal 6967680.

On note *x* l'entier du « milieu ».
Écrire une équation vérifiée par *x*.

……………………………………………………………………. (une seule égalité)

Déterminer *x* à l'aide de la commande de la calculatrice permettant de résoudre des équations polynomiales.

……………………… (une seule égalité)

Faire une phrase de conclusion : « Les entiers relatifs cherchés sont … ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On pose $\mathrm{A}(x)=x^2-2x\sqrt{3}+1$ et $\mathrm{B}(x)=3-\left(x\sqrt{2}-1\right)\left(x\sqrt{2}+1\right)$.

1°) Déterminer la forme canonique de $\mathrm{A}(x)$ en faisant apparaître une identité remarquable.

2°) Développer et réduire l'expression $\mathrm{B}(x)$.

$\mathrm{A}(x)=$ ………………………………	$\mathrm{B}(x)=$ ………………………………
$=$ ………………………………	$=$ ………………………………
$=$ ………………………………	$=$ ………………………………
$=$ ………………………………	$=$ ………………………………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On pose $\mathrm{C}(x)=(2x-1)^3-x^2(2x-1)$.

1°) Factoriser $\mathrm{C}(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

2°) Développer et réduire $\mathrm{C}(x)$ à partir de la forme initiale.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Lorsque *x* prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, quelles sont toutes les valeurs possibles que prend $\frac{1}{x}$?

……………………… (une seule réponse sous forme d'intervalle)

2°) Lorsque *x* prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[-2\,;3]$, quelles sont toutes les valeurs possibles que prend $|\,x\,|$?

……………………… (une seule réponse sous forme d'intervalle)

V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1+\sqrt{x^2-4}$.

Compléter les équivalences suivantes :

$f(x)$ existe si et seulement si ……………………………………………

si et seulement si ……………………………………………

si et seulement si ……………………………………………

Compléter l'égalité d'ensembles dans la phrase suivante en utilisant les notations correctes.

L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}$ = ...

Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de la calculatrice et vérifier la réponse précédente.

VI. (2 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $I=[-4\,;4]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-4		0		4
Variations de f	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2

Que peut-on dire du signe $f(x)$ pour $x\in I$? Répondre par une phrase quantifiée sur le modèle suivant à recopier et compléter :

« D'après le tableau de variations, $f(x)$ est de signe …. pour tout réel $x\in I$ ».

……

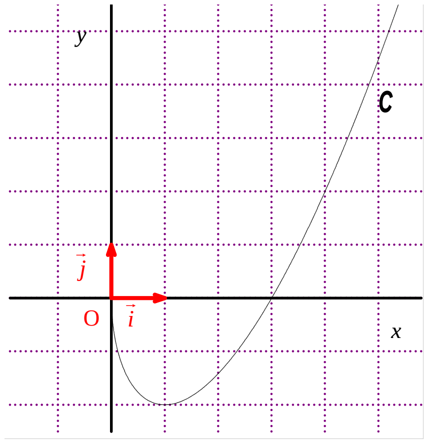
……

Faire le tableau de variations de la fonction g définie sur I par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ dans l'espace ci-dessous.

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) Tracer sur le graphique ci-dessus la droite D d'équation cartésienne $x-2y=0$.
Marquer le point A d'intersection de $\mathcal{C}$ et D d'abscisse strictement positive.
Donner par lecture graphique les coordonnées de A.

…………….. (une seule réponse, sans égalité en utilisant la notation de couple)

2°) Compléter les phrases suivantes à l'aide d'intervalles ou de réunions d'intervalles donnant la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D sur ………………………………… .
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D sur ………………………………… .
- $\mathcal{C}$ et D sont sécantes aux points …………..

3°) Quelle est l'ordonnée du point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse $4+2\sqrt{3}$? On attend le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$ avec a et b entiers.

……………………… (une seule réponse sans égalité)

VIII. (2 points)

Soit a un réel positif ou nul. Quel est l'antécédent de a par la fonction « racine carrée » ?

………. (une seule réponse sans égalité)

Corrigé du contrôle du 19-10-2018

I.

Le but de l'exercice est de déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont le produit est égal 6967680.

On note x l'entier du « milieu ».
Écrire une équation vérifiée par x.

$(x-1)x(x+1)=6967680$ (une seule égalité)

$x(x-1)(x+1)=6967680$ (une seule égalité)

Déterminer x à l'aide de la commande de la calculatrice permettant de résoudre des équations polynomiales.

196 (une seule égalité)

1ère méthode : (calculatrice TI-83-Premium CE)

On utilise la touche $\boxed{\text{résol}}$ de la calculatrice avec le choix 1 : Résoudre… .

E1 : $(X-1)X(X+1)$
E2 : 6967680

2e méthode :

On développe le premier membre et on transpose 6967680 dans le premier membre.
On obtient l'équation $x^3-x-6967680=0$.

Faire une phrase de conclusion : « Les entiers relatifs cherchés sont … ».

Les entiers relatifs cherchés sont 190, 191, 192.

II.

On pose $A(x)=x^2-2x\sqrt{3}+1$ et $B(x)=3-\left(x\sqrt{2}-1\right)\left(x\sqrt{2}+1\right)$.

1°) Déterminer la forme canonique de $A(x)$ en faisant apparaître une identité remarquable.

2°) Développer et réduire l'expression $B(x)$.

$$\begin{aligned}A(x)&=\left(x^2-2x\sqrt{3}+3\right)-3+1\\&=\left(x-\sqrt{3}\right)^2-2\end{aligned}$$

$B(x)=3-\left[\left(x\sqrt{2}\right)^2-1\right]$ (crochets obligatoires)

$$\begin{aligned}&=3-\left(2x^2-1\right)\\&=3-2x^2+1\\&=4-2x^2\end{aligned}$$

III.

On pose $C(x)=(2x-1)^3-x^2(2x-1)$.

1°) Factoriser $C(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

2°) Développer et réduire $C(x)$ à partir de la forme initiale.

1°)

$$\begin{aligned}C(x)&=(2x-1)(2x-1)^2-x^2(2x-1)\\&=(2x-1)\left[(2x-1)^2-x^2\right]\\&=(2x-1)(2x-1-x)(2x-1+x)\\&=(2x-1)(x-1)(3x-1)\end{aligned}$$

2°)
Pour développer $(2x-1)^3$, on utilise l'identité $(a-b)^3$ avec $a=2x$ et $b=1$.

$$\begin{aligned}C(x)&=8x^3-12x^2+6x-1-2x^3+x^2\\&=6x^3-11x^2+6x-1\end{aligned}$$

IV.

Cet exercice n'a pas été bien réussi.

1°) Lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, quelles sont toutes les valeurs possibles que prend $\frac{1}{x}$?

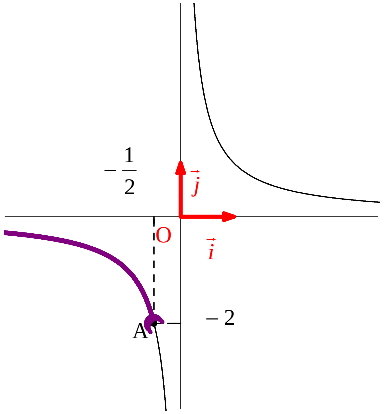
$]-2\,;0[$ (une seule réponse sous forme d'intervalle)

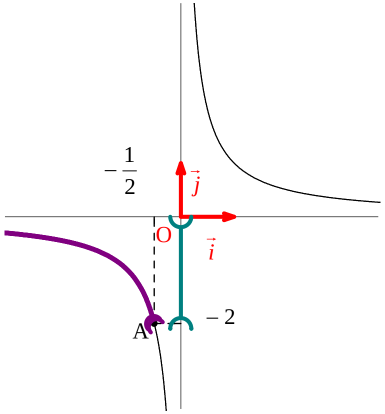
Le mieux est de raisonner graphiquement.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction « inverse ».

La partie de la courbe pour $x<-\frac{1}{2}$ est tracée en violet.

On regarde sur l'axe des ordonnées.





Il est assez facile de voir que lorsque x varie dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, $\frac{1}{x}$ varie dans l'intervalle $]-2\,;0[$.

On peut éventuellement faire les gestes avec le doigt.

2°) Lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[-2\,;3]$, quelles sont toutes les valeurs possibles que prend $|\,x\,|$?

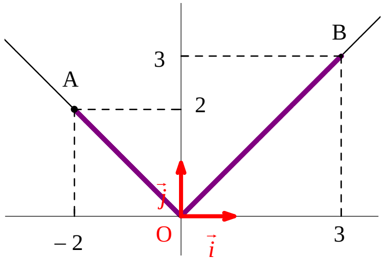
$[0\,;3]$ (une seule réponse sous forme d'intervalle)

Le mieux est de raisonner graphiquement.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction « valeur absolue ».

La partie de la courbe pour $-2 \leqslant x \leqslant 3$ est tracée en violet.

On regarde sur l'axe des ordonnées. Le minimum des ordonnées est 0 et le maximum des ordonnées est 3.



V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1+\sqrt{x^2-4}$.

Compléter les équivalences suivantes :

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2-4 \geqslant 0$

si et seulement si $x^2 \geqslant 4$

si et seulement si $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$

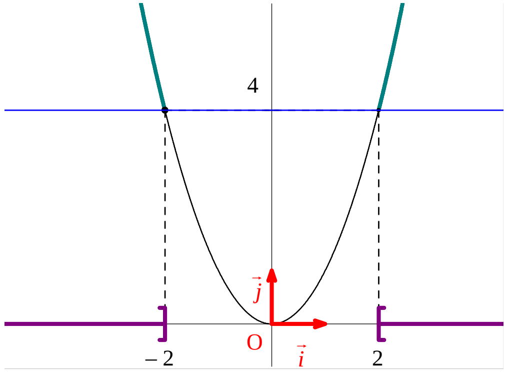
Les trois lignes sont en lien les unes avec les autres.
Il y a une progression de bas en haut.

Il ne s'agit pas de trois lignes déconnectées les unes des autres.

L'inégalité écrite sur la 1ère ligne est bien $x^2-4 \geqslant 0$ et non $\sqrt{x^2-4} \geqslant 0$.

Pour résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant 4$, il y a plusieurs méthodes possibles.

1ère méthode : graphiquement



2e méthode :

$x^2 \geqslant 4$ est successivement équivalente à :

$x^2 - 4 \geqslant 0$

$(x-2)(x+2) \geqslant 0$

On dresse ensuite un tableau de signes.

3e méthode :

$x^2 \geqslant 4$ est successivement équivalente à :

$\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{4}$

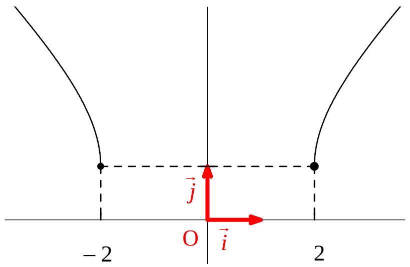
$|x| \geqslant 2$

$x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$

Compléter l'égalité d'ensembles dans la phrase suivante en utilisant les notations correctes.

L'ensemble de définition de *f* est $\mathcal{D} =]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[$.

Tracer la courbe représentative de la fonction *f* sur l'écran de la calculatrice et vérifier la réponse précédente.
On vérifie la réponse graphiquement.



VI.

On considère une fonction *f* définie sur l'intervalle $I = [-4\,;4]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-4	0	4
Variations de f	1 ↘	$\frac{1}{2}$	↗ 2

Que peut-on dire du signe $f(x)$ pour $x \in I$? Répondre par une phrase quantifiée sur le modèle suivant à recopier et compléter :

« D'après le tableau de variations, $f(x)$ est de signe …. pour tout réel $x \in I$ ».

D'après le tableau de variations, $f(x)$ est de signe positif pour tout réel $x \in I$.

En effet, le minimum de *f* sur I est strictement positif.

Faire le tableau de variations de la fonction *g* définie sur *I* par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ dans l'espace ci-dessous.

g est l'inverse de la fonction *f* donc les variations de *g* sont contraires de celles de *f*.

x	-4	0	4
Variations de g	↗	…	↘

On calcule ensuite les images de – 4, 0 et 4 par *g*.

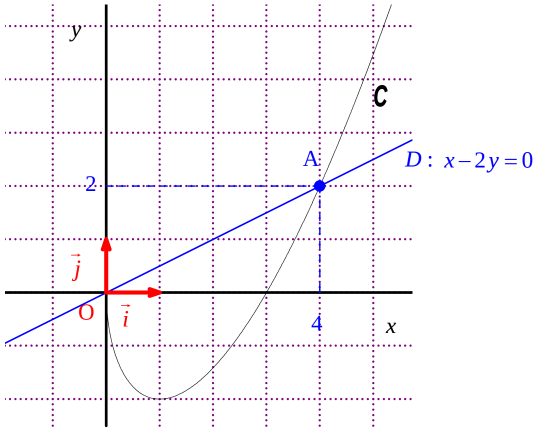
Grâce à la définition de *g*, on a $g(-4) = \dfrac{1}{f(-4)} = \dfrac{1}{1} = 1$; $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$; $g(4) = \dfrac{1}{f(4)} = \dfrac{1}{2}$.

x	-4	0	4
Variations de g	1 ↗	2	↘ $\frac{1}{2}$

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) Tracer sur le graphique ci-dessus la droite D d'équation cartésienne $x-2y=0$.
Marquer le point A d'intersection de $\mathcal{C}$ et D d'abscisse strictement positive.
Donner par lecture graphique les coordonnées de A.

$(4\,;2)$ (une seule réponse, sans égalité en utilisant la notation de couple)

La droite D a pour équation cartésienne $x-2y=0$. Son équation réduite est donc $y=\dfrac{x}{2}$ (pas forcément utile ; à ne pas écrire sur le graphique).

2°) Compléter les phrases suivantes à l'aide d'intervalles ou de réunions d'intervalles donnant la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D sur $]4\,;+\infty[$.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D sur $]0\,;4[$.

- $\mathcal{C}$ et D sont sécantes aux points O et A.

3°) Quelle est l'ordonnée du point B de $\mathcal{C}$ d'abscisse $4+2\sqrt{3}$? On attend le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$ avec a et b entiers.

$7+3\sqrt{3}$ (une seule réponse sans égalité)

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{B}} &= f\left(4+2\sqrt{3}\right) \\ &= \left(4+2\sqrt{3}-1\right)\sqrt{4+2\sqrt{3}} \\ &= \left(3+2\sqrt{3}\right)\sqrt{4+2\sqrt{3}} \\ &= 7+3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Le calcul de la ligne 3 peut être effectué avec la calculatrice ou à la main en observant que $4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

VIII.

Soit a un réel positif ou nul. Quel est l'antécédent de a par la fonction « racine carrée » ?

a^2 (une seule réponse sans égalité)

La fonction « racine carrée » est la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

On résout l'équation $f(x)=a$ c'est-à-dire $\sqrt{x}=a$ dans $\mathbb{R}_+$.

Cette équation est équivalente à $x=a^2$.

L'antécédent de a par la fonction f est a^2.