1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du mardi 25 septembre 2018 (50 min)

Prénom : ………………………………. **Nom :** ……………………………….

Note : …. / 20

I. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto |x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit a un réel strictement positif quelconque.
Déterminer les antécédents de a par f.
Après recherche au brouillon, on recopiera et complètera la phrase suivante : « Les antécédents de a par f sont … ».

……

II. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes : $1-\dfrac{|x|}{2}=3$ $\quad(1)\quad ; \quad |x-4|\geqslant 5 \quad (2)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (1 point)

Soit x et y deux réels quelconques.
Compléter la propriété :

$|x|=|y|$ si et seulement si ……………………………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit A, B, C trois points quelconques du plan P.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) On pose $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{BC}+2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+13\overrightarrow{AC}$.

Exprimer $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

……

……

……

……

……

2°) On note I le milieu de $[BC]$ et J le symétrique de I par rapport à A.

Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Indication : On commencera par exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

……

……

……

……

……

……

V. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

Soit ABCD un parallélogramme du plan *P*. Soit *a* un réel quelconque. On note E et F les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}=(1-a)\overrightarrow{DC}$.

On note I le symétrique de A par rapport à B.

Dans tout l'exercice, on rapporte le plan *P* au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, I dans ce repère.

$A\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$ $D\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$ $E\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$ $F\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$ $I\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$

Pour la résolution des questions, il est demandé de n'utiliser que des calculs de coordonnées (pas de calcul vectoriel).

1°) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction de *a*.

$$\overrightarrow{EF}\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$$

2°) On considère le point G tel que $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DG}$ (1).

Traduire l'égalité (1) en deux égalités avec les coordonnées x_G et y_G (à l'état « brut », sans calcul) en remplaçant les coordonnées de D, E, F par leurs valeurs.

$$\begin{cases}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

Après avoir effectué les calculs nécessaires au brouillon, donner les coordonnées de G.

$$G\left|\begin{matrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{matrix}\right.$$

3°) Calculer le déterminant du couple $\left(\overrightarrow{EG} ; \overrightarrow{DI}\right)$ en fonction de *a* (aucune phrase n'est demandée). On écrira une seule égalité [premier membre : la notation du déterminant avec les valeurs numériques ; deuxième membre : le résultat sous forme développée réduite].

………

4°) Déterminer *a* tel que $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DI}$ soient colinéaires. On rédigera directement sous la forme d'une chaîne d'équivalences avec des « si et seulement si ».

………

………

………

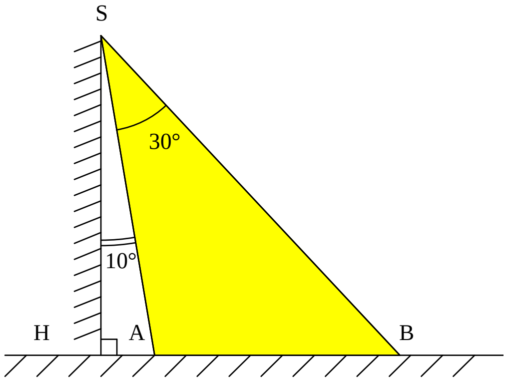
………

VI. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Dans la rue, un projecteur est accroché au mur vertical en S. Il éclaire une zone représentée sur le schéma en coupe ci-dessous par le segment $[AB]$ large de 7 mètres, sous un angle de 30°. Le rayon de lumière le plus près du mur fait avec lui un angle de 10°.

Le but de l'exercice est de déterminer la hauteur *h* (en mètres) à laquelle est suspendu le projecteur.

On note H le pied du mur. Ainsi $h=SH$.



1°) Exprimer AH et BH en fonction de *h*. On écrira directement sans justifier les deux égalités.

……………………………… ………………………………

2°) Déterminer l'expression exacte de *h* puis, à l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au dixième.

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 25-9-2018

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto |x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit a un réel strictement positif quelconque.
Déterminer les antécédents de a par f.
Après recherche au brouillon, on recopiera et complètera la phrase suivante : « Les antécédents de a par f sont … ».

Les antécédents de a par f sont $1+a$ et $1-a$.

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=a$ (1) (qui s'écrit aussi $|x-1|=a$).

$x-1=a$ ou $x-1=-a$ (car $a>0$)
$x=1+a$ ou $x=1-a$

II.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes : $1-\frac{|x|}{2}=3$ (1) ; $|x-4|\geqslant 5$ (2).

(1) est successivement équivalente à :

$-\frac{|x|}{2}=2$

$|x|=-4$ (impossible car on sait que le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul)

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=\varnothing$.

(2) est successivement équivalente à :

$x-4\leqslant -5$ ou $x-4\geqslant 5$
$x\leqslant -1$ ou $x\geqslant 9$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[9\,;+\infty\right[$.

III.

Soit x et y deux réels quelconques.
Compléter la propriété :

$$|x|=|y| \text{ si et seulement si } x=y \text{ ou } y=-x$$

IV.

Soit A, B, C trois points quelconques du plan P.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) On pose $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{BC}+2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+13\overrightarrow{AC}$.

Exprimer $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}&=3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{BC}+2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+13\overrightarrow{AC}\\&=3\overrightarrow{AB}-5\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CA}+13\overrightarrow{AC}\\&=3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+13\overrightarrow{AC}\\&=6\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2°) On note I le milieu de $[BC]$ et J le symétrique de I par rapport à A.

Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Indication : On commencera par exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\quad\text{(car I est le milieu de }[BC])\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On sait que J est le symétrique de I par rapport à A donc $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AI}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Autre méthode : On utilise la propriété $\forall M\in P\quad \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$. On prend ensuite $M=A$ (M confondu avec A).

V.

Soit ABCD un parallélogramme du plan P. Soit a un réel quelconque. On note E et F les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}=(1-a)\overrightarrow{DC}$.
On note I le symétrique de A par rapport à B.
Dans tout l'exercice, on rapporte le plan P au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, I dans ce repère.

$A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ $\quad D\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $\quad E\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$ $\quad F\left|\begin{matrix}1-a\\1\end{matrix}\right.$ $\quad I\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

Attention à l'ordonnée du point F.

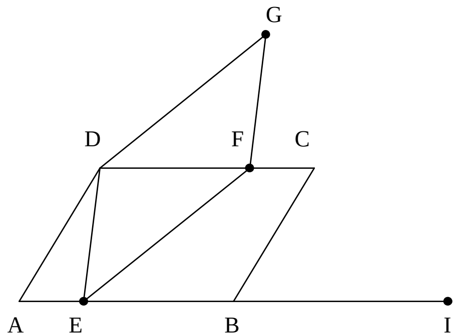
L'égalité $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}$ s'écrit $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}$, égalité qui donne immédiatement les coordonnées de E dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

L'égalité $\overrightarrow{DF}=(1-a)\overrightarrow{DC}$ donne $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+(1-a)\overrightarrow{DC}=(1-a)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Cette dernière égalité donne les coordonnées de F dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

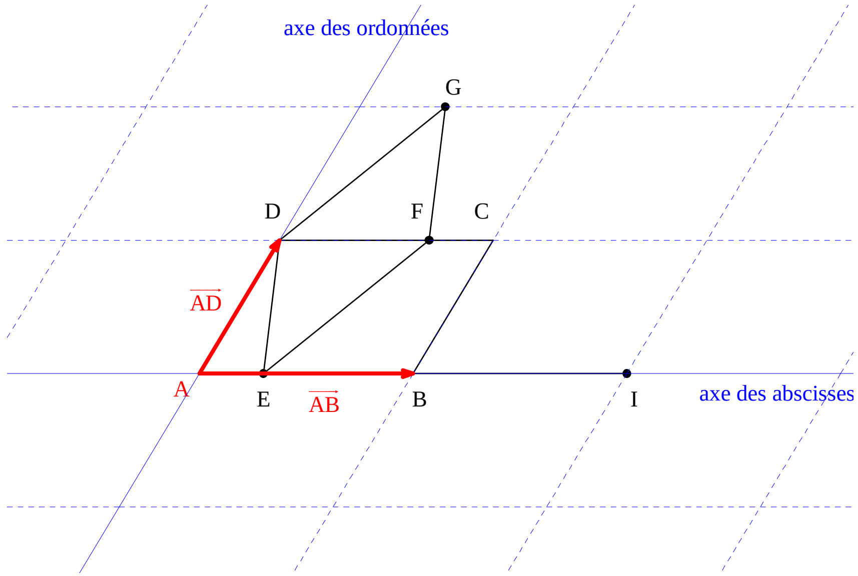
On peut aussi traduire les égalités en coordonnées mais c'est beaucoup plus maladroit car plus long donc à éviter.

Pour la résolution des questions, il est demandé de n'utiliser que des calculs de coordonnées (pas de calcul vectoriel).

On commence par faire une figure au brouillon pour une valeur particulière que l'on choisit de *a*.



On peut faire apparaître les axes du repère (ce sont les droites (AB) et (AD)) ainsi que le maillage du plan associé.



Certains résultats peuvent se lire graphiquement, comme l'ordonnée de F, l'ordonnée de G…).

1°) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction de *a*.

$$\overrightarrow{EF}\left|\begin{array}{l}1-2a\\1\end{array}\right.$$

2°) On considère le point G tel que $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DG}$ (1).

Traduire l'égalité (1) en deux égalités avec les coordonnées x_G et y_G (à l'état « brut », sans calcul) en remplaçant les coordonnées de D, E, F par leurs valeurs.

$$\begin{cases}(1-a)-a=x_G-0\\1-0=y_G-1\end{cases}$$

Après avoir effectué les calculs nécessaires au brouillon, donner les coordonnées de G.

$$G\left|\begin{array}{l}1-2a\\2\end{array}\right.$$

3°) Calculer le déterminant du couple $\left(\overrightarrow{EG}\,;\overrightarrow{DI}\right)$ en fonction de *a* (aucune phrase n'est demandée). On écrira une seule égalité [premier membre : la notation du déterminant avec les valeurs numériques ; deuxième membre : le résultat sous forme développée réduite].

$$\begin{vmatrix}1-2a & 2\\2 & -1\end{vmatrix}=-1\times(1-2a)-2\times2=2a-5$$

4°) Déterminer *a* tel que $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DI}$ soient colinéaires. On rédigera directement sous la forme d'une chaîne d'équivalences avec des « si et seulement si ».

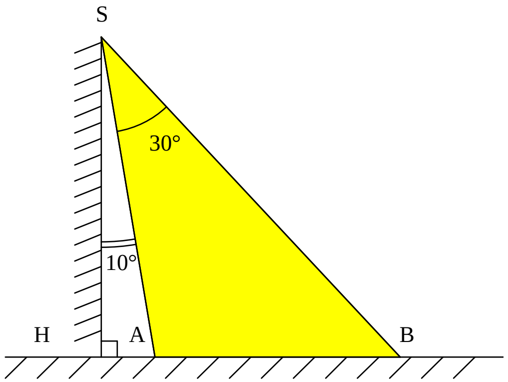
$\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant du couple $\left(\overrightarrow{EG}\,;\overrightarrow{DI}\right)$ est nul

si et seulement si $2a-5=0$

si et seulement si $a=\dfrac{5}{2}$

VI.

Dans la rue, un projecteur est accroché au mur vertical en S. Il éclaire une zone représentée sur le schéma en coupe ci-dessous par le segment $[AB]$ large de 7 mètres, sous un angle de 30°. Le rayon de lumière le plus près du mur fait avec lui un angle de 10°.
Le but de l'exercice est de déterminer la hauteur *h* (en mètres) à laquelle est suspendu le projecteur.
On note H le pied du mur. Ainsi $h=SH$.



1°) Exprimer AH et BH en fonction de *h*. On écrira directement sans justifier les deux égalités.

$\text{AH} = h \tan 10°$ m $\qquad\qquad$ $\text{BH} = h \tan 40°$ m

2°) Déterminer l'expression exacte de *h* puis, à l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au dixième.

On a $\text{AB} = \text{BH} - \text{AH}$ donc d'après le 1°), $7 = h \tan 40° - h \tan 10°$.

On peut donc écrire $7 = h(\tan 40° - \tan 10°)$.

On en déduit que $h = \dfrac{7}{\tan 40° - \tan 10°}$.

D'après la calculatrice, la valeur arrondie au dixième de *h* est 10,6.