$1^{\text{ère}}$ S2

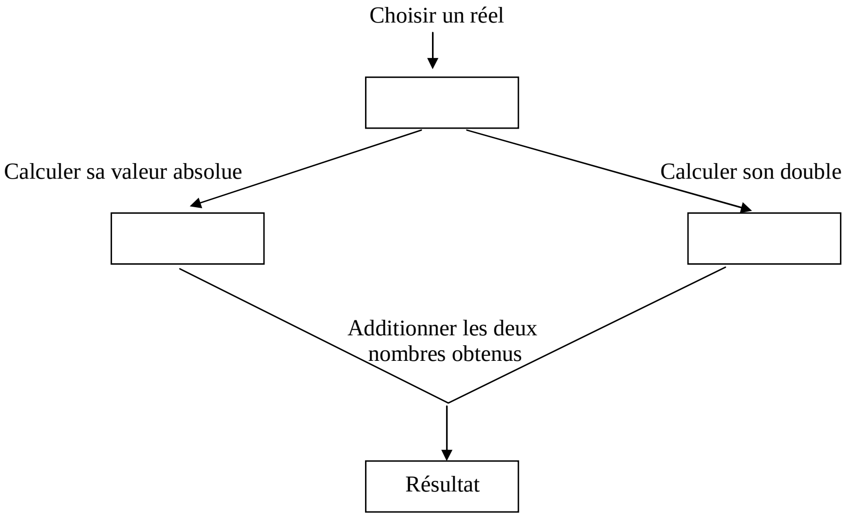
Contrôle du mardi 18 septembre 2018 (60 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère le programme de calcul ci-dessous. Il est demandé de ne rien écrire dans les cases.



1°) On choisit $\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}$ comme nombre de départ. Quel est le résultat du programme de calcul ?

…………………………………… (écrire la valeur exacte, sans égalité)

2°) Que peut-on dire du résultat si on choisit un réel négatif ou nul choisi comme nombre de départ ? Justifier par un calcul, en considérant le cas général et non des exemples).

……

……

……

……

……

3°) Quels réels choisis au départ permettent d'obtenir 21 comme résultat ? Répondre sans justifier.

……………………………………)

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

On considère la fonction s dont les paramètres *a* et *b* sont des réels.

Fonction $\text{s}(a, b)$
  $y \leftarrow a^2 - b^2$
  $z \leftarrow$ valeur absolue de y
  Renvoyer z
FinFonction

1°) Que vaut $\text{s}\left(1-2\sqrt{2}, -3\right)$? ……………………….. (une seule réponse sans justifier)

2°) Que vaut $\text{s}\left(\sqrt{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$? ……………………….. (une seule réponse sans justifier)

3°) L'affirmation « Si on échange les valeurs de *a* et *b*, alors la valeur affichée par la fonction s reste la même » est-elle vraie ou fausse ?

………….. (une seule réponse sans justifier)

4°) Compléter l'équivalence suivante :

$\text{s}(a, b) = 0$ si et seulement si ……………………………………………………………

5°) Simplifier l'expression $Z = \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}$ où *a* et *b* sont des réels quelconques. On attend une expression sans radical.
Quel lien peut-on faire avec la fonction s définie au début de l'exercice ? On répondra par une phrase.
Les deux premières lignes seront consacrées au calcul. La troisième ligne sera consacrée à la phrase-réponse.

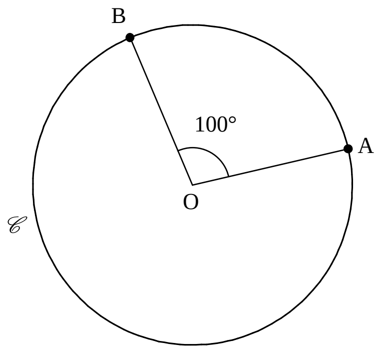
……

……

……

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2 points)

On considère la figure ci-dessous où $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O de rayon 4 cm et A et B deux points sont deux points de $\mathscr{C}$ tels que $\widehat{AOB} = 100°$.



Ne rien écrire sur la figure

1°) Calculer la longueur L de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en centimètres.
On attend uniquement la valeur exacte. On effectuera la recherche au brouillon.

$L =$ ....

2°) Calculer la longueur AB en centimètres. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.
Indication : Considérer le milieu I de $[AB]$.

....

....

....

....

....

....

....

....

IV. (2 points)

Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite (AC) en I. On note x la mesure en radians de l'angle $\widehat{ABC}$ et y la mesure en radians de l'angle $\widehat{BIC}$. Exprimer y en fonction de x.

....

....

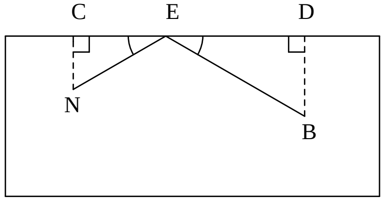
....

....

....

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans tout l'exercice, l'unité de longueur est le centimètre. Le rectangle ci-dessous représente une table de billard en vue de dessus.



Ne rien écrire sur la figure

Deux boules de billard N et B sont placées telles que $CD = 90$, $NC = 25$, $BD = 35$. Les angles $\widehat{ECN}$ et $\widehat{EDB}$ sont droits.
Un joueur veut toucher la boule N avec la boule B en suivant le trajet constitué des segments $[BE]$ et $[EN]$, E étant entre C et D, et tel que $\widehat{CEN} = \widehat{BED}$. On pose $ED = x$ ($0 < x < 90$).

1°) Exprimer $\tan \widehat{BED}$ et $\tan \widehat{CEN}$ en fonction de x. On écrira directement sans justifier les deux égalités.

....

2°) En déduire la valeur de x.

....

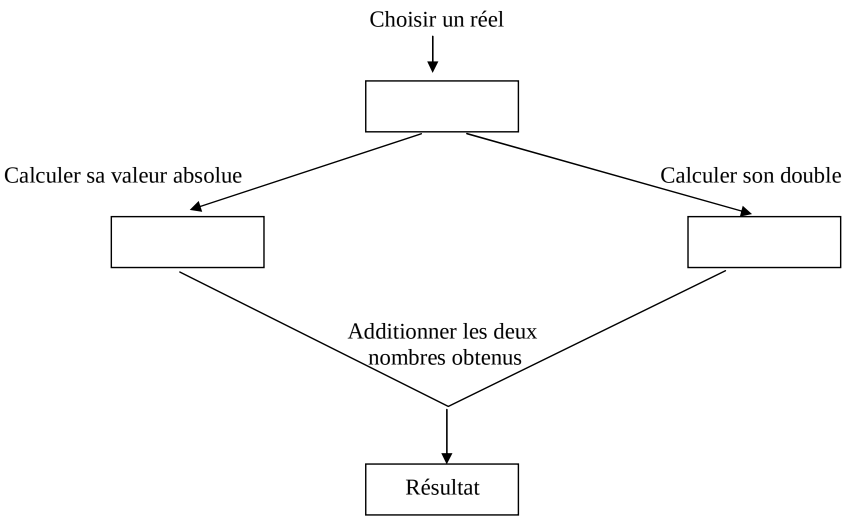
....

....

Corrigé du contrôle du 18-9-2018

I.

On considère le programme de calcul ci-dessous. Il est demandé de ne rien écrire dans les cases.



1°) On choisit $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ comme nombre de départ. Quel est le résultat du programme de calcul ?

$3\sqrt{2}-1$ (écrire la valeur exacte, sans égalité)

valeur absolue de $\sqrt{2}-\frac{1}{3}=\sqrt{2}-\frac{1}{3}$

Le double de $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ est égal à $2\sqrt{2}-\frac{2}{3}$.

Le résultat final est donc égal à $\sqrt{2}-\frac{1}{3}+2\sqrt{2}-\frac{2}{3}=3\sqrt{2}-1$.

2°) Que peut-on dire du résultat si on choisit un réel négatif ou nul choisi comme nombre de départ ? Justifier par un calcul, en considérant le cas général et non des exemples).

Si on choisit un réel négatif ou nul en nombre de départ, le résultat obtenu est égal à la valeur de départ.

En effet, soit x un réel négatif ou nul.

On sait que dans ce cas, la valeur absolue de x est égale à $-x$ donc le résultat obtenu à la fin du programme de calcul est égal à $-x+2x=x$.

3°) Quels réels choisis au départ permettent d'obtenir 21 comme résultat ? Répondre sans justifier.

7

Soit x un réel. On cherche les valeurs de x qui permettent lorsqu'on les choisit comme nombres de départ d'obtenir 21 comme résultat final.

Il y a deux cas :

1$^{\text{er}}$ cas : x est positif ou nul

Dans ce cas, le résultat final obtenu est égal à $3x$ (puisque la valeur absolue de x est égale à x).
Il faut donc choisir 7 pour obtenir 21 comme résultat final.

2$^{\text{e}}$ cas : x est négatif ou nul

D'après la question 2°), on sait que le résultat final est égal à x.
Comme 21 est un réel positif, aucun réel négatif ou nul ne permet d'obtenir 21 comme résultat final.

Le seul nombre qui permet d'obtenir 21 comme résultat final est 7.

Il ne faut pas se laisser abuser par le pluriel que l'on utilise toujours en mathématiques.

II.

On considère la fonction s dont les paramètres a et b sont des réels.

Fonction $s(a, b)$
  $y \leftarrow a^2-b^2$
  $z \leftarrow$ valeur absolue de y
  Renvoyer z
FinFonction

s est une fonction au sens de l'algorithmique qui dépend de deux paramètres (ou de deux arguments).

1°) Que vaut $s\left(1-2\sqrt{2}, -3\right)$? $4\sqrt{2}$ (une seule réponse sans justifier)

$y=\left(1-2\sqrt{2}\right)^2-\left(-3\right)^2$

$y=1-2\times1\times2\sqrt{2}+8-9$ (on développe le premier carré grâce à l'identité remarquable)

$y=-4\sqrt{2}$

$z=$ valeur absolue de $-4\sqrt{2}$

$z=4\sqrt{2}$

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice.

2°) Que vaut $s\left(\sqrt{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$? $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (une seule réponse sans justifier)

$y=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$y=2-\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}$

$y=2-\dfrac{1+2\sqrt{3}+3}{4}$ (on développe le carré grâce à l'identité remarquable)

$y=2-\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}$

$y=2-\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z=$ valeur absolue de $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ car $1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$

3°) L'affirmation « Si on échange les valeurs de a et b, alors la valeur affichée par la fonction s reste la même » est-elle vraie ou fausse ?

vraie (une seule réponse sans justifier)

Si on échange les valeurs de a et b, la valeur de z renvoyée par la fonction s est $\left|\, b^2-a^2 \,\right|$.
Or b^2-a^2 est l'opposé de a^2-b^2.
On sait que deux réels opposés ont la même valeur absolue.
Le résultat est donc égal à $\left|\, a^2-b^2 \,\right|$.

4°) Compléter l'équivalence suivante :

$s\left(a, b\right)=0$ si et seulement si $a=b$ ou $a=-b$

$s\left(a, b\right)=\left|\, a^2-b^2 \,\right|$

$s\left(a, b\right)=0$ si et seulement si $\left|\, a^2-b^2 \,\right|=0$

si et seulement si $a^2-b^2=0$

si et seulement si $a^2=b^2$

si et seulement si $a=b$ ou $a=-b$

5°) Simplifier l'expression $Z=\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4}$ où a et b sont des réels quelconques. On attend une expression sans radical.
Quel lien peut-on faire avec la fonction s définie au début de l'exercice ? On répondra par une phrase.
Les deux premières lignes seront consacrées au calcul. La troisième ligne sera consacrée à la phrase-réponse.

$Z=\sqrt{\left(a^2\right)^2-2a^2b^2+\left(b^2\right)^2}$

$Z=\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2}$

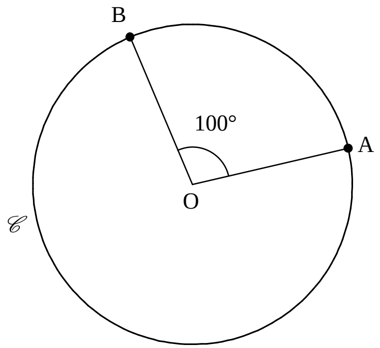
$Z=\left|\, a^2-b^2 \,\right|$

$Z=s\left(a, b\right)$

L'expression Z correspond à la valeur renvoyée par la fonction s pour les paramètres a et b.

III.

On considère la figure ci-dessous où $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O de rayon 4 cm et A et B deux points sont deux points de $\mathscr{C}$ tels que $\widehat{\text{AOB}}=100°$.



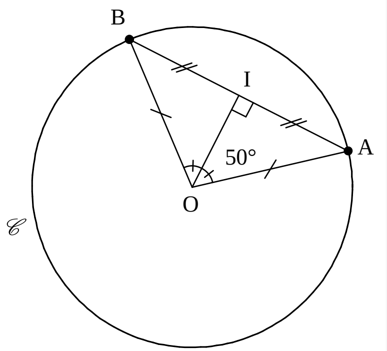
Ne rien écrire sur la figure

1°) Calculer la longueur L de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en centimètres.
On attend uniquement la valeur exacte. On effectuera la recherche au brouillon.

$$L = \frac{20\pi}{9} \text{ cm}$$

$\widehat{AOB} = \frac{5\pi}{9}$ rad (conversion immédiate) donc $L = (4\text{ cm}) \times \frac{5\pi}{9}$ cm. On obtient $L = \frac{20\pi}{9}$ cm.

2°) Calculer la longueur AB en centimètres. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.
Indication : Considérer le milieu I de $[AB]$.



Par hypothèse, I est le milieu de $[AB]$ donc $AB = 2AI$.

Comme $OA = OB = 4$ cm, le triangle OAB est isocèle en O.

Le point I est donc le pied de la hauteur issue de O dans ce triangle et la droite (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Ainsi, $\widehat{AOI} = 50°$.

On se place dans le triangle OIA rectangle en I.

On a $\sin 50° = \frac{AI}{AO}$ donc $\sin 50° = \frac{AI}{4\text{ cm}}$.

On en déduit que $AI = (4\text{ cm}) \times \sin 50°$ soit $AI = 4\sin 50°$ cm.

Donc $AB = 8\sin 50°$ cm.

Avec la calculatrice, on obtient $AB = 6{,}1285554...$.

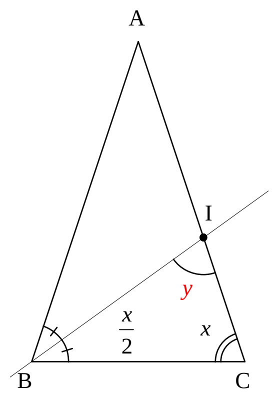
La valeur arrondie au dixième de la longueur AB en centimètres est donc 6,1.

IV.

Soit ABC un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite (AC) en I.

On note x la mesure en radians de l'angle $\widehat{ABC}$ et y la mesure en radians de l'angle $\widehat{BIC}$.
Exprimer y en fonction de x.

On se place dans le triangle BCI.



Dans tout l'exercice, on travaille en radians.

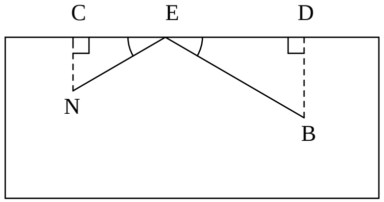
On sait tout d'abord que $\widehat{CBI} = \frac{x}{2}$ (propriété de la bissectrice d'un angle).

Par ailleurs, $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = x$ car, dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure.

Comme la somme des mesures en radians des angles d'un triangle est égale à π, $y = \pi - x - \frac{x}{2}$ ce qui donne finalement $y = \pi - \frac{3x}{2}$.

V.

Dans tout l'exercice, l'unité de longueur est le centimètre. Le rectangle ci-dessous représente une table de billard en vue de dessus.



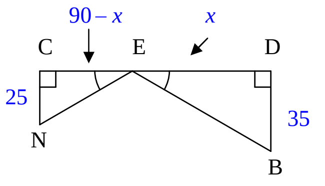
Ne rien écrire sur la figure

Deux boules de billard N et B sont placées telles que $CD = 90$, $NC = 25$, $BD = 35$. Les angles $\widehat{ECN}$ et $\widehat{EDB}$ sont droits.

Un joueur veut toucher la boule N avec la boule B en suivant le trajet constitué des segments $[BE]$ et $[EN]$, E étant entre C et D, et tel que $\widehat{CEN} = \widehat{BED}$. On pose $ED = x$ ($0 < x < 90$).

1°) Exprimer $\tan\widehat{BED}$ et $\tan\widehat{CEN}$ en fonction de x. On écrira directement sans justifier les deux égalités.

$$\tan\widehat{BED} = \frac{35}{x} \qquad \tan\widehat{CEN} = \frac{25}{90 - x}$$



2°) En déduire la valeur de x.

$\widehat{CEN} = \widehat{BED}$ donc $\tan\widehat{CEN} = \tan\widehat{BED}$.

On peut donc écrire les égalités suivantes.

$$\frac{25}{90 - x} = \frac{35}{x}$$

$$\frac{5}{90 - x} = \frac{7}{x}$$

$$5x = 7(90 - x)$$

$$12x = 7 \times 90$$

$x = \dfrac{105}{2}$ (on peut aussi écrire $x = 52,5$)