1ère S1

Contrôle du vendredi 1er juin 2018 (50 min)

Prénom : ………………………………. **Nom :** ……………………………….

Note : …. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit x un réel quelconque. On pose $\text{E} = \cos x \times (\cos x - 2\sin x) - \sin x \times (\cos x + 2\sin x)$.

1°) Démontrer que $\text{E} = a\cos 2x + b\sin 2x + c$ où a, b, c sont trois réels à déterminer.

2°) En déduire que $\text{E} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit α le réel de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$ tel que $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{9}$.

1°) Calculer $\sin\alpha$ en justifiant avec précision.
2°) Calculer $\cos 4\alpha$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On s'intéresse à un nouveau médicament utilisé contre le cholestérol.
Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.
Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

1°) À l'aide de la loi binomiale, déterminer un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.
On donnera les bornes sous forme décimale.

…………………………….. (une seule réponse, sans égalité , sans justifier)

2°) L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.
Que peut-on en conclure ? On demande de justifier précisément à l'aide l'intervalle déterminé à la question précédente.

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note *D* la droite passant par le point $\mathrm{A}\left(3\,;-2\right)$ admettant le vecteur $\vec{u}\,\left(3\,;4\right)$ pour vecteur normal.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite *D*.

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à *D* passant par le point $\mathrm{B}\left(5\,;5\right)$.

3°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur *D*.

4°) Déterminer les coordonnées du point C, symétrique de B par rapport à *D*.

Conseils donnés à l’oral

IV.

2°) et 3°) On utilise le même point M pour les deux questions (et non M pour le 2°) et M' pour le 3°)).

4°) On détermine les coordonnées par le calcul (et non graphiquement).

Corrigé du contrôle du 1-6-2018

I.

Soit x un réel quelconque. On pose $\mathrm{E}=\cos x\times(\cos x-2\sin x)-\sin x\times(\cos x+2\sin x)$.

Il s'agit d'un exercice de calcul littéral trigonométrique.

1°) Démontrer que $\mathrm{E}=a\cos 2x+b\sin 2x+c$ où a, b, c sont trois réels à déterminer.

$\mathrm{E}=\cos x\times(\cos x-2\sin x)-\sin x\times(\cos x+2\sin x)$

$=\cos^2 x-2\sin x\times\cos x-\sin x\times\cos x-2\sin^2 x$

$=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-3\sin x\times\cos x-(1-\cos 2x)$

$=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-3\dfrac{\sin 2x}{2}-(1-\cos 2x)$ (on utilise la formule $\sin x\times\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$ qui découle de la formule de duplication $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$)

$=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{3\sin 2x}{2}-\dfrac{2(1-\cos 2x)}{2}$

$=\dfrac{1+\cos 2x-3\sin 2x-2(1-\cos 2x)}{2}$

$=\dfrac{1+\cos 2x-3\sin 2x-2(1-\cos 2x)}{2}$

$=\dfrac{3\cos 2x-3\sin 2x-1}{2}$

$=\dfrac{3\cos 2x}{2}-\dfrac{3\sin 2x}{2}-\dfrac{1}{2}$

2°) En déduire que $\mathrm{E}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$.

1ère méthode : On reprend le résultat obtenu à la question précédente.

$\mathrm{E}=\dfrac{3}{2}(\cos 2x-\sin 2x)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}(\cos 2x-\sin 2x)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos 2x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sin 2x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos 2x\times\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin 2x\times\sin\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$

2e méthode : On pose $\mathrm{F}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$.

$\mathrm{F}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos 2x\times\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin 2x\times\sin\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos 2x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sin 2x\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x-\sin 2x)-\dfrac{1}{2}$ (on a factorisé l'expression)

$=\dfrac{3}{2}(\cos 2x-\sin 2x)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3\cos 2x}{2}-\dfrac{3\sin 2x}{2}-\dfrac{1}{2}$

$=\mathrm{E}$

II.

Soit α le réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ tel que $\cos 2\alpha=-\frac{1}{9}$.

1°) Calculer $\sin\alpha$ en justifiant avec précision.

On a $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ donc $-\frac{1}{9}=1-2\sin^2\alpha$ d'où $\sin^2\alpha=\frac{5}{9}$.

On en déduit que $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Or $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ par hypothèse d'où $\sin\alpha\leqslant 0$.

On en déduit que $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2°) Calculer $\cos 4\alpha$.

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha&=\cos(2\times 2\alpha)\\&=2\cos^2 2\alpha-1\\&=2\times\left(-\frac{1}{9}\right)^2-1\\&=\frac{2}{81}-1\\&=-\frac{79}{81}\end{aligned}$$

III.

On s'intéresse à un nouveau médicament utilisé contre le cholestérol.
Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires.
Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

1°) À l'aide de la loi binomiale, déterminer un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires.
On donnera les bornes sous forme décimale.

$[0{,}21\,;0{,}39]$ (une seule réponse, sans égalité , sans justifier)

1ère méthode :

On note T une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}3$.

On travaille avec un seuil de 95 %. On supprime 5 % des deux côtés c'est-à-dire 2,5 % à gauche et 2,5 % à droite.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $P(\mathrm{T}\leqslant a)>0{,}025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $P(\mathrm{T}\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.

Autre manière de rédiger :

On note F la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}3$.

On cherche :

- le plus petit entier naturel a tel que $\mathrm{F}(a)>0{,}025$;
- le plus petit entier naturel b tel que $\mathrm{F}(b)\geqslant 0{,}975$.

Sur la calculatrice, on rentre la fonction : $\mathrm{Y1}=\mathrm{binomFRép}(100,0.3,\mathrm{X})$.
On définit un pas de table de 1 et $\mathrm{Xmin}=0$.
On trouve $a=21$ et $b=39$.

2e méthode :

On utilise la commande invBinom((faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib).

Aire : 0.025 nbreEssais : 100 p : 0.3 coller invBinom(0.025,100,0.3) puis $\boxed{\text{entrer}}$ On trouve 21.	Aire : 0.975 nbreEssais : 100 p : 0.3 coller invBinom(0.975,100,0.3) puis $\boxed{\text{entrer}}$ On trouve 39.

3e méthode : On peut utiliser un programme dans la calculatrice.

Vérifications :

① On a $p=0{,}3$.
On constate que p appartient bien à l'intervalle de fluctuation et que c'est le centre de cet intervalle.

② On vérifie par le calcul que $P(21\leqslant\mathrm{T}\leqslant 39)$ est voisine de 0,95, en étant légèrement supérieure.

On a : $P(21\leqslant\mathrm{T}\leqslant 39)=P(\mathrm{T}\leqslant 39)-P(\mathrm{T}\leqslant 20)$.

Avec la calculatrice, on obtient : $P(21\leqslant\mathrm{T}\leqslant 39)=0{,}962548570...$.

③ L'application de la formule donnée en seconde pour l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % donne :

$$p-\frac{1}{\sqrt{n}}=0,3-\frac{1}{\sqrt{100}}=0,3-\frac{1}{10}=0,3-0,1=0,2\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}=0,38+\frac{1}{\sqrt{100}}=0,3+\frac{1}{10}=0,3+0,1=0,4$$

On constate que les valeurs obtenues grâce à la loi binomiale sont assez proches.

La formule de second permet de gagner du temps dans la recherche des entiers naturels *a* et *b* avec la loi binomiale.

2°) L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires.
Que peut-on en conclure ? On demande de justifier précisément à l'aide l'intervalle déterminé à la question précédente.

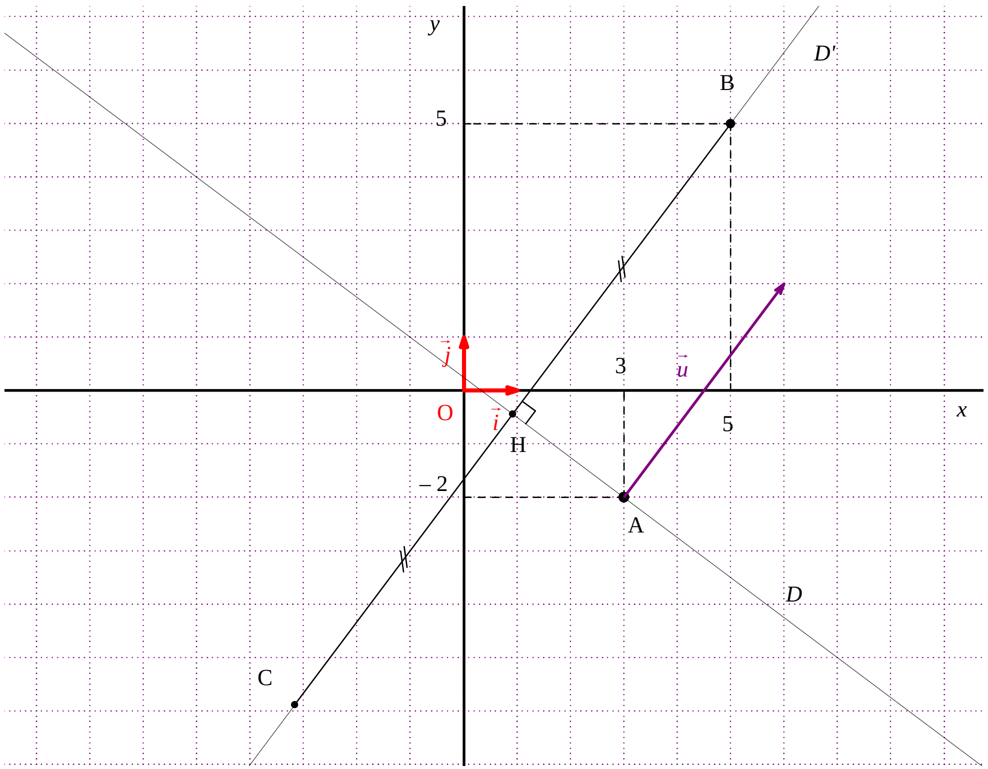
La fréquence observée de présentant des effets secondaires dans l'échantillon est $f=\frac{37}{100}=0,37$.

Comme $f\in[0,21\,;0,39]$, il n'y a pas lieu de rejeter l'hypothèse « $p=0,3$ » au seuil de 95 %.

Les données observées sont déclarées compatibles avec le modèle construit en prenant la valeur 0,3 pour paramètre.

IV.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on note *D* la droite passant par le point $\mathrm{A}(3\,;-2)$ admettant le vecteur $\vec{u}\,(3\,;4)$ pour vecteur normal.



1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite *D*.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M}\in D \Leftrightarrow \vec{u}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ (1$^{\text{ère}}$ ligne sans coordonnées ; on peut aussi écrire $\vec{u}\bullet\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$)

$\Leftrightarrow 3\times(x-3)+4\times(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 3x-9+4y+8=0$

$\Leftrightarrow 3x+4y-1=0$

D a pour équation cartésienne $3x+4y-1=0$.

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à *D* passant par le point $\mathrm{B}(5\,;5)$.

$\vec{u}$ est un vecteur normal à *D*. Or $D'\perp D$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D'.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M}\in D' \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & 3 \\ y-5 & 4 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 4(x-5)-3(y-5)=0$

$\Leftrightarrow 4x-3y-5=0$

D' a pour équation cartésienne $4x-3y-5=0$.

3°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur *D*.

H est le point d'intersection de *D* et de D'.

Le couple de coordonnées de H est donc la solution du système $\begin{cases}3x+4y-1=0\\4x-3y-5=0\end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases}3x+4y=1\\4x-3y=5\end{cases}\quad\begin{array}{|c|c}\times 3 & \times 4\\ \times 4 & \times(-3)\\ \downarrow & \downarrow\\ \text{pour annuler les } y & \text{pour annuler les } x\end{array}$$

$$\begin{cases} 25x = 23 \\ 25y = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{23}{25} \\ y = -\dfrac{11}{25} \end{cases}$$

Le couple solution du système est $\left(\dfrac{23}{25}\,;-\dfrac{11}{25}\right)$.

On vérifie que la solution est correcte grâce à la calculatrice (application permettant de résoudre des systèmes linéaires).

Donc H a pour coordonnées $\left(\dfrac{23}{25}\,;-\dfrac{11}{25}\right)$.

4°) Déterminer les coordonnées du point C, symétrique de B par rapport à *D*.

C est le symétrique de B par rapport à *D* signifie que C est le symétrique de B par rapport à H.

H est donc le milieu de $[\text{BC}]$.

Cette information se traduit en coordonnées par $\begin{cases} \dfrac{x_{\text{B}} + x_{\text{C}}}{2} = \dfrac{23}{25} \\ \dfrac{y_{\text{B}} + y_{\text{C}}}{2} = -\dfrac{11}{25} \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x_{\text{B}} + x_{\text{C}} = \dfrac{46}{25} \\ y_{\text{B}} + y_{\text{C}} = -\dfrac{22}{25} \end{cases}$.

On en déduit que $\begin{cases} 5 + x_{\text{C}} = \dfrac{46}{25} \\ 5 + y_{\text{C}} = -\dfrac{22}{25} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_{\text{C}} = \dfrac{46}{25} - 5 \\ y_{\text{C}} = -\dfrac{22}{25} - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\text{C}} = -\dfrac{79}{25} \\ y_{\text{C}} = -\dfrac{147}{25} \end{cases}$$

Ainsi C a pour coordonnées $\left(-\dfrac{79}{25}\,;-\dfrac{147}{25}\right)$.

On vérifie que ces résultats sont cohérents avec ceux lus sur le graphique.