TS1 et TS3 spécialité

Contrôle du jeudi 17 mai 2018 (50 minutes)

Prénom : …………… **Nom : …………………………………………**

Note : …. / 20

Dans tous les exercices, il est conseillé de représenter la situation par un graphe probabiliste au brouillon.
Il est demandé de ne rien écrire en dehors des réponses attendues dans les espaces prévues à cet effet.

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :
• soit susceptible d'être atteint par le virus ;
• soit malade (atteint par le virus) ;
• soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel *n*, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :
• parmi les individus susceptibles d'être atteint par le virus en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent susceptibles d'être atteint par le virus, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
• parmi les individus malades en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades et 35 % sont guéris et deviennent immunisés ;
• tout individu immunisé en semaine *n* reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population.

Pour tout entier naturel *n*, on note x_n la probabilité que l'individu soit susceptible d'être atteint par le virus en semaine *n*, y_n la probabilité que l'individu soit malade en semaine *n*, z_n la probabilité que l'individu soit immunisé en semaine *n*.
En semaine 0, tous les individus sont susceptibles d'être atteint par le virus. On a donc les probabilités suivantes : $x_0=1$, $y_0=0$ et $z_0=0$.
Le but de l'exercice est d'étudier à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel *n*, on note U_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de *n* transmissions.

Ainsi $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout entier naturel *n*, on ait $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n$.

(une seule égalité)

2°) On admet que $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix} 0,85^n & 0 & 0 \\ 0,25\times 0,85^n-0,25\times 0,65^n & 0,65^n & 0 \\ 1-1,25\times 0,85^n+0,25\times 0,65^n & 1-0,65^n & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

À l'aide de ce résultat, exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de *n*.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) Calculer la limite de chacune des suites (x_n), (y_n) et (z_n) en détaillant bien la démarche pour la première suite.
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ? Répondre par une phrase.

……

……

……

……

……

II. (12 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points ; 6°) 2 points)

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon de modèle suivant :
• elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$;
• elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1 - p$.
On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.
On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :
• x_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
• y_n la probabilité que le bit reçu ait la valeur 0.
On a donc $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de n transmissions.
Ainsi $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer la matrice A carrée d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel n on ait $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.

(une seule égalité sans justifier)

Dans toute la suite, on pose $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

2°) Justifier que Q est inversible et préciser Q^{-1}.

3°) Vérifier que $\mathrm{QDQ}^{-1} = \mathrm{A}$. Il est demandé de détailler les calculs.

4°) Calculer A^n.

5°) En déduire les expressions de x_n et de y_n en fonction de n et de p.

………..

………..

6°) Déterminer les limites de x_n et de y_n en détaillant bien la démarche.

………..

………..

………..

………..

……….

III. (3 points)

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité. Avant le lancement de cette campagne, on en contrôle l'impact auprès d'un panel de consommateurs.
On trouve ceux qui ont une opinion favorable, ceux qui sont neutres et ceux qui ont une opinion négative.
On a constaté que d'une semaine sur l'autre :
• 28 % des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre, 10 % une opinion négative et les autres ne changent pas ;
• Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32 % émettent un avis favorable, 10 % un avis négatif et les autres ne changent pas ;
• 70 % des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion, 16 % adoptent un avis favorable et les autres ne changent pas.
On suppose qu'initialement c'est-à-dire avant le début de la campagne, tous les consommateurs ont une opinion neutre.
Calculer la probabilité qu'un consommateur ait une opinion favorable trois semaines après le début de la campagne publicitaire. On donnera la valeur exacte.

……………………. (un seul résultat sans égalité)

Corrigé du contrôle du 17-5-2018

I.

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :
• soit susceptible d'être atteint par le virus ;
• soit malade (atteint par le virus) ;
• soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.
Pour tout entier naturel *n*, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :
• parmi les individus susceptibles d'être atteint par le virus en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent susceptibles d'être atteint par le virus, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
• parmi les individus malades en semaine *n*, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades et 35 % sont guéris et deviennent immunisés ;
• tout individu immunisé en semaine *n* reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population.

Pour tout entier naturel *n*, on note x_n la probabilité que l'individu soit susceptible d'être atteint par le virus en semaine *n*, y_n la probabilité que l'individu soit malade en semaine *n*, z_n la probabilité que l'individu soit immunisé en semaine *n*.
En semaine 0, tous les individus sont susceptibles d'être atteint par le virus. On a donc les probabilités suivantes : $x_0=1$, $y_0=0$ et $z_0=0$.
Le but de l'exercice est d'étudier à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel *n*, on note U_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de *n* transmissions.

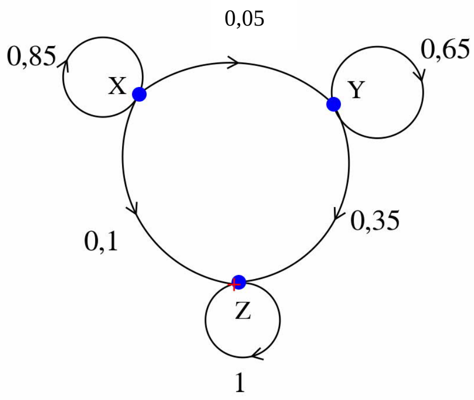
Ainsi $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout entier naturel *n*, on ait $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n$.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0,85 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,65 & 0 \\ 0,1 & 0,35 & 1 \end{pmatrix} \text{ (une seule égalité)}$$

1ère méthode : On représente la situation par un graphe probabiliste.

On considère les états :
• X : « L'individu est susceptible d'être atteint par le virus » ;
• Y : « L'individu est malade (atteint par le virus) » ;
• Z : « L'individu est immunisé ».

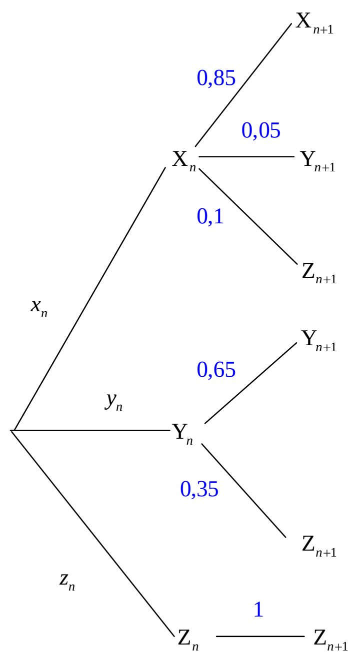


On évite de tracer les arêtes avec un poids nul. Cela alourdit inutilement le graphe probabiliste.

La matrice A est la matrice de transition en colonnes du graphe probabiliste en prenant les sommets dans l'ordre X, Y, Z.

2e méthode : On dresse un arbre de probabilités et on écrit les relations entre x_{n+1} et x_n, y_{n+1} et y_n, z_{n+1} et z_n.

On considère les évènements suivants :
X_n : « L'individu est susceptible d'être atteint par le virus en semaine *n* » ;
Y_n : « L'individu est malade en semaine *n* » ;
Z_n : « L'individu est immunisé en semaine *n* ».



$x_{n+1}=0,85x_n$
$y_{n+1}=0,05x_n+0,65y_n$
$z_{n+1}=0,1x_n+0,35y_n+z_n$

Il est intéressant de remarquer que l'on peut également obtenir la réponse grâce au résultat admis dans la question suivante pour $n=1$.

2°) On admet que $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix} 0,85^n & 0 & 0 \\ 0,25\times0,85^n-0,25\times0,65^n & 0,65^n & 0 \\ 1-1,25\times0,85^n+0,25\times0,65^n & 1-0,65^n & 1\end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

On précise que les étoiles remplacent certains coefficients.
À l'aide de ce résultat, exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de *n*.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \mathrm{U}_n=\mathrm{A}^n\mathrm{U}_0$.

Or $\mathrm{U}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Par produit matriciel, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \mathrm{U}_n=\begin{pmatrix}0,85^n\\0,25\times0,85^n-0,25\times0,65^n\\1+0,25\times0,65^n-1,25\times0,85^n\end{pmatrix}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}x_n=0,85^n\\y_n=0,25\times0,85^n-0,25\times0,65^n\\z_n=1+0,25\times0,65^n-1,25\times0,85^n\end{cases}$.

3°) Calculer la limite de chacune des suites (x_n), (y_n) et (z_n) en détaillant bien la démarche pour la première suite.
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ? Répondre par une phrase.

$-1<0,85<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0,85^n=0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$.

Il est très important de préciser que $-1<0,85<1$ car il s'agit du résultat de cours sur la limite de q^n quand $-1<q<1$.

On obtient de même $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=1$.

Cette dernière limite permet d'affirmer sur le long terme, selon ce modèle, tous les individus seront immunisés contre l'épidémie.
Autrement dit, cela signifie qu'à terme, l'épidémie sera éradiquée.

II.

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon de modèle suivant :
• elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité *p* telle que $0<p<1$;
• elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité $1-p$.
On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres.
On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé *n* lignes de transmission, on note :
• x_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
• y_n la probabilité que le bit reçu ait la valeur 0.
On a donc $x_0=1$ et $y_0=0$.
Pour tout entier naturel *n*, on note U_n la matrice colonne donnant l'état probabiliste au bout de *n* transmissions.

Ainsi $\mathrm{U}_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

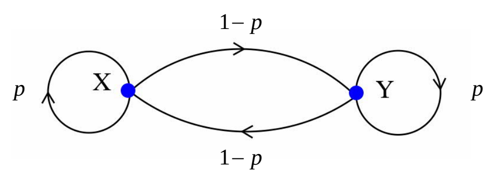
1°) Déterminer la matrice A carrée d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel *n* on ait $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n$.

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}p & 1-p\\1-p & p\end{pmatrix}$ (une seule égalité sans justifier)

Il est non seulement inutile mais même maladroit d'écrire $1-p$ entre parenthèses dans la matrice.

On considère les états :
• X : « Le bit reçu a pour valeur 1 » ;
• Y : « Le bit reçu a pour valeur 0 ».

On représente la situation par le graphe probabiliste suivant :



Dans toute la suite, on pose $\mathrm{Q}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2p-1\end{pmatrix}$.

2°) Justifier que Q est inversible et préciser Q^{-1}.

Q est une matrice carrée d'ordre 2.

$\det\mathrm{Q}=1\times(-1)-1\times1=-2$

$\det\mathrm{Q}\neq0$ donc Q est inversible.

$\mathrm{Q}^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ (écriture matricielle factorisée) ou encore $\mathrm{Q}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

On peut également écrire $Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

3°) Vérifier que $QDQ^{-1}=A$. Il est demandé de détailler les calculs.

$$QDQ^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2p-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2p-1\\ 1 & 1-2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1-p & p\end{pmatrix}$$

$$=A$$

4°) Calculer A^n.

On utilise le résultat de la question précédente.

Attention, pour calculer A^n, on n'élève pas tous les coefficients de A à la puissance *n*.

$A=QDQ^{-1}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=QD^nQ^{-1}$ (propriété du cours).

La propriété du cours que l'on utilise ici se vérifie aisément de la manière suivante :

$$A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n \text{ facteurs}}$$

$$A^n=\underbrace{QDQ^{-1}\times QDQ^{-1}\times\ldots\times QDQ^{-1}}_{n \text{ facteurs}}$$

Attention à l'ordre des facteurs : la multiplication des matrices n'est pas commutative.
On ne peut changer de place les matrices dans le produit.

$$A^n=QD\underbrace{Q^{-1}\times Q}_{I_n}D\underbrace{Q^{-1}\times Q}_{I_n}D\underbrace{Q^{-1}\times\ldots}_{I_n}\ldots\underbrace{\ldots\times Q}_{I_n}DQ^{-1}\quad (\text{car on a : } Q^{-1}Q=I_n)$$

$$A^n=Q\underbrace{D\times D\times\ldots\times D}_{n \text{ facteurs}}Q^{-1}$$

$$A^n=QD^nQ^{-1}$$

D étant une matrice diagonale, on a : $D^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (2p-1)^n\end{pmatrix}$.

D'où $A^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (2p-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Finalement on obtient $\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$.

5°) En déduire les expressions de x_n et de y_n en fonction de *n* et de *p*.

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}\quad U_n=A^nU_0$.

Or $U_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

Par produit matriciel, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}\quad U_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n\end{pmatrix}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}(2p-1)^n \\ y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(2p-1)^n \end{cases}$.

6°) Déterminer les limites de x_n et de y_n en détaillant bien la démarche.

On sait que $0 < p < 1$ par hypothèse donc $0 < 2p < 2$ et $-1 < 2p-1 < 1$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (2p-1)^n = 0$.

D'après le résultat de la question 5°), par opérations sur les limites, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \dfrac{1}{2}$.

III.

Un industriel décide de mettre sur le marché un nouveau produit. Afin de promouvoir celui-ci, il souhaite lancer une campagne hebdomadaire de publicité. Avant le lancement de cette campagne, on en contrôle l'impact auprès d'un panel de consommateurs.
On trouve ceux qui ont une opinion favorable, ceux qui sont neutres et ceux qui ont une opinion négative.
On a constaté que d'une semaine sur l'autre :
• 28 % des consommateurs ayant un avis favorable adoptent une position neutre, 10 % une opinion négative et les autres ne changent pas ;
• Parmi les consommateurs ayant une opinion neutre, 32 % émettent un avis favorable, 10 % un avis négatif et les autres ne changent pas ;
• 70 % des consommateurs ayant un avis négatif ne changent pas d'opinion, 16 % adoptent un avis favorable et les autres ne changent pas.
On suppose qu'initialement c'est-à-dire avant le début de la campagne, tous les consommateurs ont une opinion neutre.
Calculer la probabilité qu'un consommateur ait une opinion favorable trois semaines après le début de la campagne publicitaire. On donnera la valeur exacte.

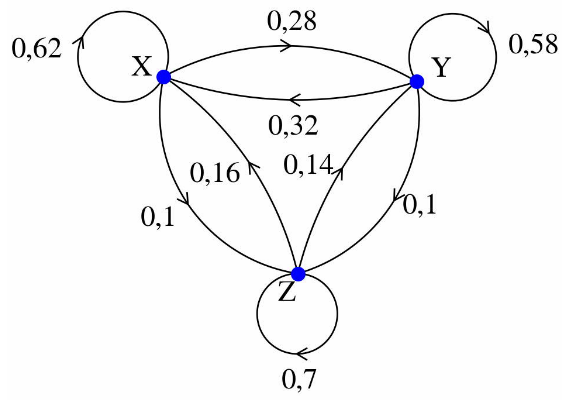
0,4144 (un seul résultat sans égalité)

Dans cet exercice, l'élève doit faire lui même toute la démarche.

On considère les états :
• X : « Le consommateur a un avis favorable » ;
• Y : « Le consommateur a un avis neutre » ;
• Z : « Le consommateur a un avis négatif ».

On représente le graphe probabiliste correspondant à la situation.

On peut aussi introduire des suites sans forcément faire un graphe probabiliste.



La matrice de transition en colonnes A du graphe probabiliste en prenant les états dans l'ordre X, Y, Z est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,62 & 0,32 & 0,16 \\ 0,28 & 0,58 & 0,14 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

On vérifie que la somme des coefficients dans chaque colonne est égale à 1.

Pour tout entier naturel *n*, on note U_n la matrice colonne à trois lignes et une colonne qui représente l'état probabiliste la semaine *n*.

D'après l'énoncé, $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0$.

On a donc $U_3 = A^3 U_0$.

Avec la calculatrice, on obtient $U_3 = \begin{pmatrix} 0,4144 \\ 0,3896 \\ 0,196 \end{pmatrix}$.

On peut aussi calculer U_3 de proche en proche.

La probabilité qu'un consommateur ait une opinion favorable trois semaines après le début de la campagne publicitaire est donc égale à 0,4144.