TS2 spé

Contrôle du mercredi 6 juin 2018 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points : 1 point + 2 points)

Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

Recopier et compléter les phrases :

- Les diviseurs positifs de p sont ……………………………. .
- Les diviseurs positifs de p^n sont ……..………………………………………………………………………. .

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On pose $a=9^{2017}\times 15^{1000}$.

1°) Compléter la phrase :

L'exposant de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de a est ….. .

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de a.

……………………………………………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On pose $a=3^{100}\times 5^{20}\times 13^{4}$ et $b=3^{97}\times 5^{33}\times 11^{2}\times 13^{2}$.

1°) Compléter les égalités suivantes. On écrira uniquement les décompositions en facteurs premiers sans effectuer les calculs.

$\text{PGCD}(a,b)=$ ....

$\text{PPCM}(a,b)=$ ....

2°) Parmi les nombres a et b lequel est un carré parfait ? Justifier.

………..…

………..…

………..…

IV. (1 point)

On donne $a=3^{5}\times 2^{2017}$ et $b=6^{4}\times 4^{1000}$.

L'un de ces nombres divise l'autre. Lequel ? Justifier.

………..…

………..…

V. (5 points : 1°) 2 point ; 2°) 3 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $\text{A}=8^{n}+8^{n+1}$.

1°) Conjecturer grâce à la calculatrice les valeurs de n telles que A soit un carré parfait.

2°) Démontrer la conjecture de la question précédente. Faire un raisonnement par équivalence.

………..…

………..…

………..…

………..…

………..…

………..…

………..…

………..…

………..…

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit p un nombre premier fixé.

1°) Démontrer que pour a et b entiers relatifs, $ab\equiv 0$ (mod. p) $\Leftrightarrow$ $a\equiv 0$ (mod. p) ou $b\equiv 0$ (mod. p).

2°) Déterminer les entiers relatifs x vérifiant la condition (C) : « x et x^2 ont le même reste dans la division euclidienne par p ».

Corrigé du contrôle du 6-6-2018

I.

Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

Recopier et compléter les phrases :

● Les diviseurs positifs de p sont 1 et p.

● Les diviseurs positifs de p^n sont les entiers naturels de la forme p^k avec k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.

On pose $a = 9^{2017} \times 15^{1000}$.

1°) Compléter la phrase :

L'exposant de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de a est 5034.

$$a = \left(3^2\right)^{2017} \times (3 \times 5)^{1000}$$

$$= 3^{4034} \times 3^{1000} \times 5^{1000}$$

$$= 3^{5034} \times 5^{1000}$$

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de a.

5 040 035

On applique la formule permettant de calculer le nombre de diviseurs positifs d'un entier naturel à partir de la décomposition en facteurs premiers.

$$n = (5034+1) \times (1000+1)$$

$$= 5035 \times 1001$$

$$= 5040035$$

III.

On pose $a = 3^{100} \times 5^{20} \times 13^4$ et $b = 3^{97} \times 5^{33} \times 11^2 \times 13^2$.

1°) Compléter les égalités suivantes. On écrira uniquement les décompositions en facteurs premiers sans effectuer les calculs.

$\text{PGCD}(a,b) = 3^{97} \times 5^{20} \times 13^2$ $\qquad$ $\text{PPCM}(a,b) = 3^{100} \times 5^{33} \times 13^4 \times 11^2$

2°) Parmi les nombres a et b lequel est un carré parfait ? Justifier.

On utilise la condition nécessaire et suffisante portant sur la décomposition en facteurs premiers pour qu'un entier naturel soit un carré parfait (tous les exposants doivent être pairs).

a est un carré parfait car tous les exposants de sa décomposition en facteurs premiers sont pairs.

Il faut noter qu'ici on utilise le sens facile.

Remarque :

Il est aussi possible d'écrire les racines carrées de a et de b à partir de leurs décompositions en facteurs premiers.
Néanmoins, cette méthode présente l'inconvénient de ne pas utiliser le cours de manière directe.

$$\sqrt{a} = 3^{50} \times 5^{10} \times 13^2$$

$$\sqrt{b} = 3^{48} \times \sqrt{3} \times 5^{16} \times \sqrt{5} \times 13$$

Il est d'ailleurs possible d'obtenir ces résultats en remplaçant les racines carrées par des puissances $\frac{1}{2}$ comme suit.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \left(3^{100} \times 5^{20} \times 13^4\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{50} \times 5^{10} \times 13^2$$

$$\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} = \left(3^{97} \times 5^{33} \times 11^2 \times 13^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{48} \times \sqrt{3} \times 5^{16} \times \sqrt{5} \times 13$$

IV.

On donne $a = 3^5 \times 2^{2017}$ et $b = 6^4 \times 4^{1000}$.
L'un de ces nombres divise l'autre. Lequel ? Justifier.

On commence par effectuer la décomposition de b en produit de facteurs premiers.

$$b = 2^4 \times 3^4 \times \left(2^2\right)^{1000}$$
$$= 2^4 \times 3^4 \times 2^{2000}$$
$$= 2^{2004} \times 3^4$$

Les nombres premiers qui interviennent dans la décomposition en facteurs premiers de b sont 2 et 3.
Comme ils se retrouvent dans la décomposition en facteurs premiers de a avec des exposants supérieurs ou égaux à ceux de la décomposition de a, on peut affirmer que $b \mid a$.

On peut préciser que $4 < 5$ et $2004 < 2017$.

V.

Pour tout entier naturel n, on pose $A = 8^n + 8^{n+1}$.

1°) Conjecturer grâce à la calculatrice les valeurs de n telles que A soit un carré parfait.

D'après la calculatrice, on peut conjecturer que A est un carré parfait si et seulement si n est un entier pair.

2°) Démontrer la conjecture de la question précédente. Faire un raisonnement par équivalence.

On commence par déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de A.

$$A = 8^n + 8^n \times 8$$

$$= 8^n \times (1+8)$$

$$= 8^n \times 9$$

$$= \left(2^3\right)^n \times 3^2$$

$$= 2^{3n} \times 3^2 \quad \text{(décomposition en facteurs premiers de A)}$$

On procède ensuite par équivalences.

A est un carré parfait $\Leftrightarrow$ $3n$ est pair

$\Leftrightarrow$ n est pair

On utilise la condition nécessaire et suffisante portant sur la décomposition en facteur premier pour qu'un entier naturel soit un carré parfait (tous les exposants doivent être pairs).

Il est aussi possible de raisonner par disjonction de cas mais la démarche est un peu moins bonne car elle n'est pas directe.

VI.

Soit p un nombre premier fixé.

1°) Démontrer que pour a et b entiers relatifs, $ab \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$ ou $b \equiv 0 \pmod{p}$.

On utilise la propriété « $p \mid ab \Leftrightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$ » pour p nombre premier et a et b entiers relatifs.

$ab \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow p \mid ab$

$\Leftrightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$

$\Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$ ou $b \equiv 0 \pmod{p}$

2°) Déterminer les entiers relatifs x vérifiant la condition (C) : « x et x^2 ont le même reste dans la division euclidienne par p ».

On traduit en congruences d'abord la condition (C) en congruence modulo p (première ligne de la chaîne d'équivalences ci-dessous).

$(\mathrm{C}) \Leftrightarrow x^2 \equiv x \pmod{p}$

$\Leftrightarrow x^2 - x \equiv 0 \pmod{p}$

$\Leftrightarrow x(x-1) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{p}$ ou $x-1 \equiv 0 \pmod{p}$ (on utilise le résultat de la question précédente)

$\Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{p}$ ou $x \equiv 1 \pmod{p}$

Les entiers relatifs vérifiant la condition (C) sont les entiers congrus à 0 ou à 1 modulo p.