Travail d'été de mathématiques

Ce travail doit être rédigé dans un cahier. Il est conseillé de prévoir un planning de révision pour que tout soit fini à la fin du mois d'août.

Après chaque énoncé, vous trouverez une feuille comprenant des éléments de correction qui vous aiderons au cas où vous bloqueriez sur une question.

Quoiqu'il en soit vous pouvez m'appeler pour tout problème au numéro suivant 01 39 50 19 72 pendant quasiment tout le mois de juillet ; n'hésitez pas à l'utiliser.

Je corrigerai les cahiers à la rentrée.

Bon courage.

SOMMAIRE

PARTIE 1. ALGÈBRE

PARTIE 2. FONCTIONS

PARTIE 3 - GÉO

Partie 1

ALGÈBRE

Feuille N°1. CHAP. 1. Les nombres.

① On donne les nombres : $A = 2 \times 10^5 + 10^3$; $B = \sqrt{48} - \sqrt{75}$; $C = \dfrac{(5 \times 10^{-20})^2}{10^{-36}}$; $D = \dfrac{\pi}{2}$;

$E = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{7}$; $F = 3{,}001 \times 10^{25}$;

$G = \dfrac{5\sqrt{48}}{7\sqrt{75}}$; $H = \sqrt{3^2} + \sqrt{(-5)^2}$;

Dans chaque cas, déterminez le plus petit ensemble de nombres auxquels ils appartiennent en utilisant le symbole $\in$ (par exemple, $A \in \ldots$)

---

② Calculez (présentation en colonnes)

$A = 1 - \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$; $B = \left(1+\dfrac{1}{3}\right) \times \left(1-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$; $C = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}-1}$;

$D = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}} - 5$; $E = \dfrac{1}{7} - \dfrac{1-\dfrac{5}{3}}{2}$; $F = \dfrac{1}{\sqrt{13}-2\sqrt{2}}$

$G = \dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}}$; $H = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \times \left(2 - \dfrac{1}{4}\right)^{-1}$; $I = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$J = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $K = \dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$;

$L = (\sqrt{2}+\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+\sqrt{5}+1)$ (écrire : $L = [(\sqrt{2}+\sqrt{5})-1][(\sqrt{2}+\sqrt{5})+1]$)

③ On pose $E = 4x^2 - x - 1$.
Calculer E pour $x = -\frac{1}{3}$, pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour $x = 1 - \sqrt{3}$.

---

④ Déterminer l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = (2 \times 10^{-19})^{-1}$; $B = \dfrac{49 \times 10^{-3}}{1{,}4 \times 10^{15}}$

---

⑤ Soit x et y deux réels, y étant non nul.
On pose $A = xy^2 - \dfrac{y}{x}$.
Calculer A

- $x = 2$ et $y = \frac{1}{3}$
- $x = \sqrt{2}$ et $y = 3$
- $x = \sqrt{3}+1$ et $y = 2$

---

⑥ 1°) Décomposer 324 en facteurs premiers.
2°) Déduisez-en que 324 est un carré parfait.
3°) Calculer $A = \dfrac{1}{324} + \dfrac{1}{18}$.

---

⑦ 1°) Développer l'expression $E = (x-2)^2 - (x-1)(x-4)$.

2°) Utiliser le 1°) en prenant une valeur de x convenable pour donner astucieusement la valeur du nombre $1234^2 - 1235 \times 1232$ <u>sans calcul</u>.

⑧ Soit x et y deux réels non nuls tels que $x+y \neq 0$. On note S la somme des inverses de x et y et S' l'inverse de la somme de x et y.

1°) Donner les expressions de S et S' en fonction de x et y.

2°) Calculer S et S' pour $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{1}{2}$.

---

⑨ On pose $N = 48 \times 14^3 \times 21^5$.

1°) Déterminer la décomposition de N en facteurs premiers.

2°) Démontrer que le double de N est un carré parfait.

---

⑩ On pose $A = 0,0002$

Déterminer l'écriture scientifique de A, A^{-3}, A^2, $10^{-6}A^3$.

---

⑪ Soit x un réel différent de 0 et de 1.

Réduire au même dénominateur

$$A = \frac{2}{x-1} + \frac{3x-1}{2x} - \frac{x^2+2}{x^2-x}.$$

---

⑫ Dans chaque cas, démontrer que A et B sont inverses l'un de l'autre

1°) $A = \frac{7}{3} - \frac{5}{7} \times \left(1 - \frac{2}{9}\right)$ et $B = \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2$

2°) $A = 4\sqrt{2} - \sqrt{31}$ et $B = 4\sqrt{2} + \sqrt{31}$

(1) $A = 201\,000$ $A \in \mathbb{N}$; $B = -\sqrt{3}$ $B \in \mathbb{R}$;

$C = 0{,}0025$ $C \in \mathbb{D}$; $D \in \mathbb{R}$; $E = \frac{8}{7}$ $E \in \mathbb{Q}$;

$F = 3001 \times 10^{28}$ $F \in \mathbb{N}$; $G = \frac{4}{7}$ $G \in \mathbb{Q}$;

$H = 8$ $H \in \mathbb{N}$

---

(2) $\frac{6 - 5\sqrt{3}}{6}$; 2 ; $\frac{4 - \sqrt{6}}{5}$; $-\frac{19}{5}$; $\frac{10}{21}$; $\frac{\sqrt{13} + 2\sqrt{2}}{5}$;

-7 ; $\frac{3}{7}$; $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$; -1 ; $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{7}$; $6 + 2\sqrt{10}$

---

(3) $-\frac{2}{9}$; $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; $14 - 7\sqrt{3}$

---

(4) 5×10^{18} ; $3{,}5 \times 10^{-17}$

---

(5) $\frac{1}{18}$; $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; $5 + 3\sqrt{3}$

---

(6) 1°) $2^2 \times 3^4$ 2°) $324 = 18^2$

3°) $A = \frac{19}{324}$

---

(7) 1°) $E = x$

2°) $x = 1236$ $1234^2 - 1235 \times 1232 = 1236$

8

1°) $S = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; $S' = \dfrac{1}{x+y}$.

2°) $S = 5$; $S' = \dfrac{6}{5}$

9

1°) $N = 2^7 \times 3^6 \times 7^8$

2°) $N = 2 \times 2^6 \times 3^6 \times 7^8$

$N = 2 \times (2^3 \times 3^3 \times 7^4)^2$

Or $N' = 2^3 \times 3^3 \times 7^4$ est un entier

d'où $N = 2(N')^2$

donc N est le double d'un carré parfait.

---

10 2×10^{-4} ; $1{,}25 \times 10^{11}$; 4×10^{-8} ; 8×10^{-18}

---

11 $A = \dfrac{x^2 - 3}{2x(x-1)}$

---

12 1°) $A = \dfrac{16}{9}$ $B = \dfrac{9}{16}$

2°) $A \times B = 1$

Feuille N° 2 . Equations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1. $2x\sqrt{3} - x\sqrt{2} = 5$

2. $\dfrac{5x\sqrt{3}}{3} - 1 = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$

3. $7\sqrt{2} + x = x\sqrt{3}$

4. $25x^2 - 4 + (5x-2)(x-1) - x(5x-2) = 0$

5. $-5x + \sqrt{3} = x\sqrt{2}$

6. $x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$

7. $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x+2}{5} = \sqrt{2}$

8. $\dfrac{x-\sqrt{2}}{3} + 1 = 2x$

9. $x^2 - 1 + (x-1)(x+3) - (x-1) = 0$

10. $x(x-1)(x+3) - x(x^2-1) = 0$

11. $2x^2 = 50$

12. $2x(3x-1) = (3x-1)^2$

13. $(3x-4)^2 = (-x+3)^2$

14. $(x\sqrt{2} - 1)^2 = 4$

15 $x^2+2x+1=(2x-4)(x+1)$

16 $9(4x-1)-4(7x-5)=2(4x-9)$

17 $2x(x+1)-(x+1)^2=-3$

18 $(-x+2)(2x+1)+(3x+2)(x-1)=0$

SOLUTIONS

(1) $\cancel{\dfrac{10\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{10}}$ $\dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

(2) $\dfrac{20\sqrt{3}+\cancel{3}\,6\sqrt{5}}{85}$

(3) $\dfrac{7\sqrt{6}+7\sqrt{2}}{2}$

(4) $\dfrac{2}{5}\ ;\ -\dfrac{1}{5}$

(5) $\dfrac{-\sqrt{6}+5\sqrt{3}}{23}$

(6) $\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2}$

(7) $\dfrac{6+15\sqrt{2}}{2}$

(8) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{5}$

(9) $1\ ;\ -\dfrac{3}{2}$

(10) $1\ ;\ 0$

(11) $5\ ;\ -5$

(12) $1\ ;\ \dfrac{1}{3}$

(13) $\dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{7}{4}$

(14) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(15) $-1\ ;\ 5$

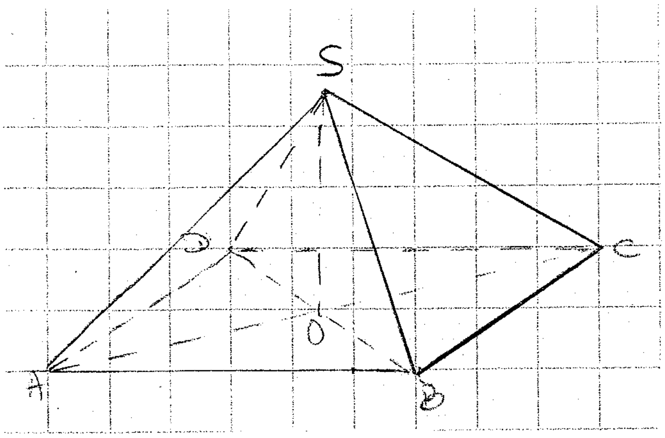
(16) $\emptyset$

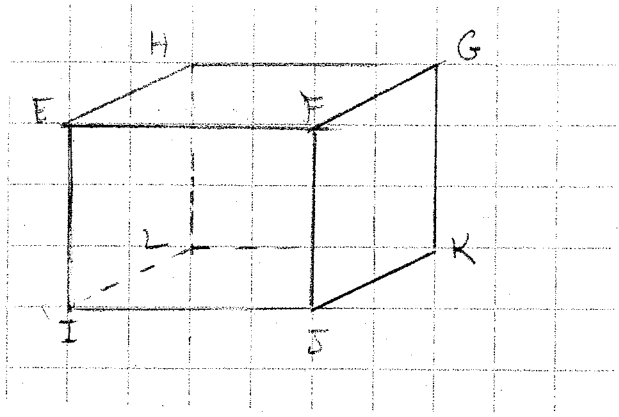
(17) $\emptyset$

(18) $0\ ;\ -2$

SUJET

On considère la pyramide à base carrée SABCD telle que $AB = 2x + 1$ et que la hauteur $SO = 3$ et le pavé droit IJKLEFGH tel que $EI = 1$ et que la base IJKL est un carré tel que $IJ = x + 3$.

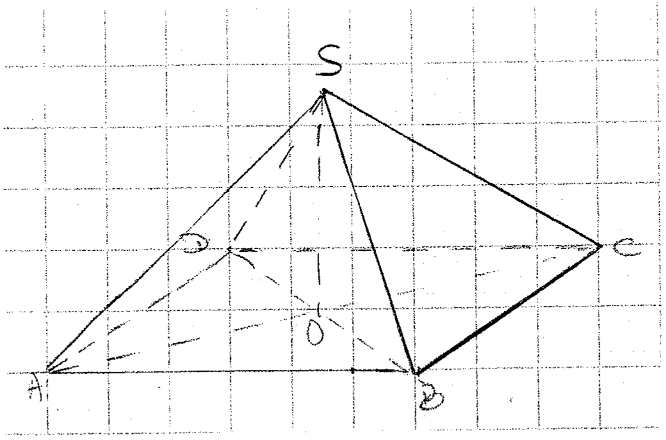


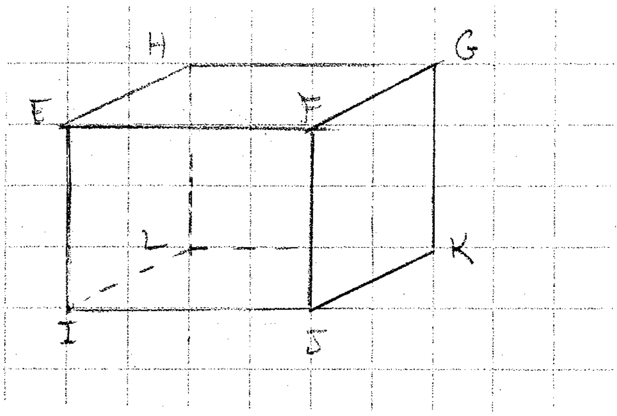


Déterminer la valeur de x pour laquelle les deux solides ont même volume. $(x = 2)$

SUJET

On considère la pyramide à base carrée SABCD telle que $AB = 2x + 1$ et que la hauteur $SO = 3$ et le pavé droit IJKLEFGH tel que $EI = 1$ et que la base IJKL est un carré tel que $IJ = x + 3$.

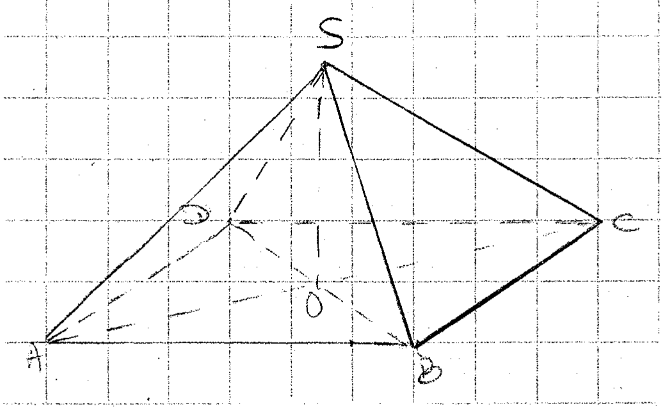


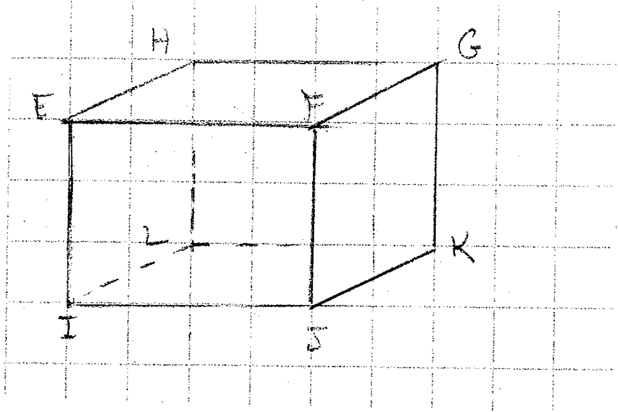


Déterminer la valeur de x pour laquelle les deux solides ont même volume.

SUJET

On considère la pyramide à base carrée SABCD telle que $AB = 2x + 1$ et que la hauteur $SO = 3$ et le pavé droit IJKLEFGH tel que $EI = 1$ et que la base IJKL est un carré tel que $IJ = x + 3$.

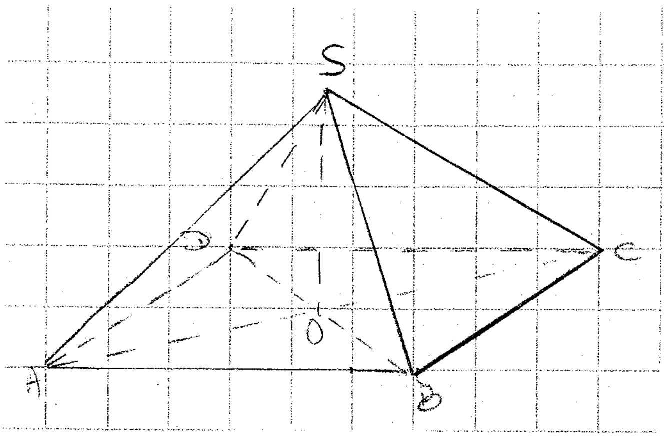


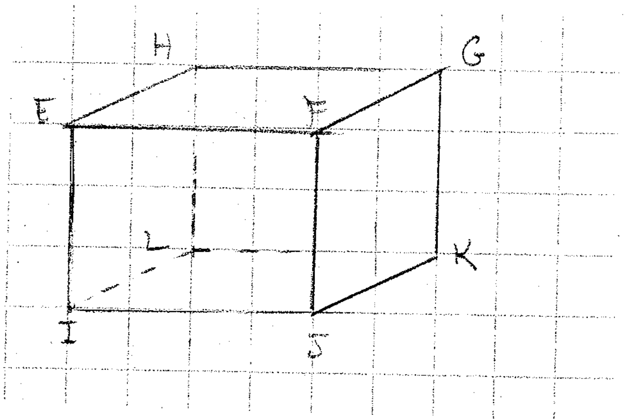


Déterminer la valeur de x pour laquelle les deux solides ont même volume.

SUJET

On considère la pyramide à base carrée SABCD telle que $AB = 2x + 1$ et que la hauteur $SO = 3$ et le pavé droit IJKLEFGH tel que $EI = 1$ et que la base IJKL est un carré tel que $IJ = x + 3$.





Déterminer la valeur de x pour laquelle les deux solides ont même volume.

Feuille N°3 Comparaisons ; inégalités.

① Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

$x + x\sqrt{2} \geq 0$ (1) ; $x - x\sqrt{2} \geq 1$ (2)

$2x - 4 > \sqrt{3}$ (3) ; $x - \sqrt{2} \geq -x\sqrt{3}$ (4)

---

② Démontrer que $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

---

③ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

$2(x-5) - 3(2x-1) \leq x+3$ (1)

$1 > 3(8x-9) - 2(3x-5) - 6(1+2x)$ (2)

$7(4x-2) - 4(6x-1) > x-1$ (3)

$2(9+7x) \leq 3(6x+2) - 4(x-5)$ (4)

$\dfrac{4x-1}{2} - \dfrac{5x-1}{3} \geq 2$ (5)

$\dfrac{6x-1}{2} - x < 1 + \dfrac{4x-7}{3}$ (6)

$\dfrac{x-2}{4} > \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-3}{5}$ (7)

$\dfrac{4x+3}{3} - \dfrac{x+5}{2} \leq \dfrac{5x+4}{6}$ (8)

④ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations

$$\begin{cases} 3x-4 < 5x+2 & (1) \\ 4x+5 \geqslant 7x-1 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x+5 \leqslant 5x-7 & (1) \\ 4x+1 \leqslant 2x+6 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+2 \geqslant 3x-4 & (1) \\ 7x-1 < 4x+2 & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x-2 < 6x+1 & (1) \\ 8x+1 \geqslant 3x+5 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3 < 1+5x & (1) \\ x-4 \geqslant 5x-13 & (2) \\ 5x-2 > 3x-1 & (3) \end{cases}$$

Corrigé de la feuille N°3

① $S_1 =]0 ; +\infty[$; $S_2 =]-\infty ; -1\ \sqrt{2}]$

$S_3 =]\frac{4+\sqrt{3}}{2} , +\infty[$; $S_4 =]\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$

② On effectue les produits en croix

$(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2$

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

d'où l'égalité

③ $S_1 = [-2 , +\infty[$; $S_2 =]-\infty ; 4[$; $S_3 =]3 , +\infty[$

$0x \leq 8$ $S_4 = \mathbb{R}$; $S_5 = [\frac{13}{2} , +\infty[$; $S_6 =]-\infty , -\frac{5}{4}[$

$S_7 =]-\infty ; -12[$; $0x \leq 1$ $S_8 = \mathbb{R}$

④ $S =]-3 ; 2]$; $S = \emptyset$; $S = [-3 ; 1[$

$S = [\frac{4}{5} ; 1[$; $S = \emptyset$

CHAP | Tableaux de signes

① Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

$x(-x+4) - 2x(2x+3) > 0$ (1)	$\left]-\frac{2}{5}, 0\right[$
$(2x-5)(x+1) + (5-2x)(2x-1) \leqslant 0$ (2)	$\left]-\infty, 2\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$
$(3x+1)^2 - (4-2x)^2 \leqslant 0$ (3)	$\left[-5; \frac{3}{5}\right]$
$x^2 + x > 0$ (4)	$\left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, +\infty\right[$
$(2x-1)^2 - (2x-1)(3-x) < 0$ (5)	$\left]\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right[$
$(3x-4)^2 \geqslant (-4x+5)^2$ (6)	$\left[1; \frac{9}{7}\right]$
$1 - 4(x-1)^2 < 0$ (7)	$\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$
$(3x+2)^2 - (x-1)^2 < 0$ (8)	$\left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right[$

② Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations

$$\begin{cases} x^2 - 4 \leqslant 0 & (1) \\ 2x - 3x(x+1) < 0 & (2) \end{cases}$$

$\left[-2; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, 2\right]$

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

$\dfrac{2x}{-3+2x} \leqslant 0$ (1) $\qquad [0, \frac{3}{2}[$

$\dfrac{3x+2}{x^2-4} > 0$ (2) $\qquad]-2; -\frac{2}{3}[\cup]2; +\infty[$

$\dfrac{2x-3}{x-4} < 3$ (3) $\qquad]-\infty; 4[\cup]9; +\infty[$

$\dfrac{x+3}{3x-5} \leqslant \dfrac{3x-5}{x+3}$ (4) $\qquad]-\infty; -3[\cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{3}[\cup [4; +\infty[$

$\dfrac{3x+2}{x-2} \leqslant 5$ (5) $\qquad]-\infty; 2[\cup [6; +\infty[$

---

(4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ la double inéquation

$$0 \leqslant \frac{4x-2}{x+1} < 1$$

On résoudra séparément les inéquations

$0 \leqslant \dfrac{4x-2}{x+1}$ (1) et $\dfrac{4x-2}{x+1} < 1$ (2)

($S_1 =]-\infty, -1[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

$S_2 =]-1, 1[$

$S = S_1 \cap S_2 = [\frac{1}{2}, 1[$)

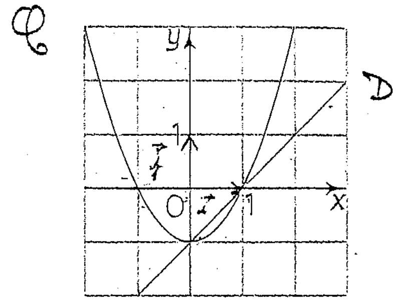
Partie 2

Fonctions

Fonction carré.

SUJET A

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 1$.



1°) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ (1)

a) graphiquement b) par le calcul.

2°) Déterminer la fonction affine g qui est représentée par la droite D.

3°) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ (2)

a) graphiquement b) par le calcul.

On notera S_1 et S_2 les ensembles de solutions respectifs de (1) et (2).

SUJET A

1°) a) Phrase
b) Tableau de signes }

2°) $g(x) = x - 1$

3°) a) Phrase

b) $x^2 - 1 \leqslant x - 1$

$x^2 - x \leqslant 0$

$x(x-1) \leqslant 0$

Tableau de signes

$S_2 = [0, 1]$

SUJET B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

1°) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.
Recopier et compléter la phrase :
« On peut conjecturer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ égal à ... ; il est obtenu pour $x = ...$ »

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture par le calcul.

a) Calculer $f(1)$
b) Soit x un réel quelconque.
Comparer par différence $f(x)$ et $f(1)$.
c) Conclure.

SUJET_B

1°) minimum égal à 2
obtenu pour $x = 1$

2°) a) $f(1) = 2$

b) $f(x) - f(1) = (x-1)^2 + 2 - 2$
$= (x-1)^2$

Or un carré est toujours positif ou nul

donc $f(x) - f(1) \geq 0$
$f(x) \geq f(1)$

On retrouve ainsi le résultat du 1°)

SUJET C

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le but de l'exercice est de déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.

1°) a) Démontrer que pour tout réel x

$$f(x) = (x-2)^2 - 1.$$

b) Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe (Ox).

Conclure en rédigeant ainsi :

$\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points $A(\ldots, \ldots)$ et $B(\ldots, \ldots)$

ou $\mathcal{C} \cap (Ox) = \{A, B\}$ avec $A(\ldots, \ldots)$ et $B(\ldots, \ldots)$

2°) Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.

3°) Contrôler les résultats trouvés précédemment en représentant graphiquement f sur la calculatrice.

SUJET C

1°) a) $(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1$

$= x^2 - 4x + 3$

$= f(x)$

b) On résout l'équation $f(x) = 0$

(en utilisant $f(x) = (x-2)^2 - 1$)

$(x-2)^2 - 1 = 0$

$(x-2)^2 - 1^2$

$(x-2+1)(x-2-1) = 0$

$(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1$ ou $x = 3$

Conclusion

$\mathcal{C} \cap (Ox) = \{A, B\}$ avec $A(1, 0)$ et $B(3, 0)$

2°) On calcule $f(0)$

$f(0) = 3$

Conclusion

$\mathcal{C} \cap (Oy) = \{C\}$ avec $C(0, 3)$

SUJET D

On considère la fonction $f : x \longmapsto 5 - 2x^2$.

1°) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.
Recopier et compléter :
« On peut conjecturer que
f est ... sur $[0, +\infty[$ et ... sur $]-\infty, 0]$ »

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture.

- Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques dans l'intervalle $[0, +\infty[$ tels que $x_1 \leqslant x_2$.
On veut comparer $f(x_1) = 5 - 2(x_1)^2$ et $f(x_2) = 5 - 2(x_2)^2$ en procédant par étapes.
Recopier et compléter :

$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$

$(x_1)^2 \ldots (x_2)^2$ car la fonction carré est ... sur $[0, +\infty[$

$-2(x_1)^2 \ldots -2(x_2)^2 \quad \times(-2) \quad (-2 < 0)$

$5 - 2(x_1)^2 \ldots 5 - 2(x_2)^2 \quad +5$

$f(x_1) \ldots f(x_2)$

Conclure.

• Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ tels que $x_1 \leqslant x_2$.
Comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ avec la même démarche en commençant par $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$.
Conclure.

3°) Faire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
Calculer la valeur du maximum.

SUJET →

1°) a) décroissante sur $[0, +\infty[$

b) croissante sur $]-\infty, 0[$

2°)

- $0 \leq x_1 \leq x_2$
- $(x_1)^2 \leq (x_2)^2$ (fonction carré croissante sur $[0, +\infty[$)
- $-2(x_1)^2 \geq -2(x_2)^2$
- $5-2(x_1)^2 \geq 5-2(x_2)^2$
- $f(x_1) \geq f(x_2)$

d'où le résultat du 1°) a

- $x_1 \leq x_2 \leq 0$
- $(x_1)^2 \geq (x_2)^2$ (fonction carré décroissante sur $]-\infty, 0]$
- $-2(x_1)^2 \leq -2(x_2)^2$
- $5-2(x_1)^2 \leq 5-2(x_2)^2$
- $f(x_1) \leq f(x_2)$

d'où le résultat du 1°) b)

SUJET F

On considère la fonction $f : x \longmapsto (x-3)^2 - 1$.

1°) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.

Recopier et compléter :

« On peut conjecturer que

f est ... sur l'intervalle ...

f est ... " " ... »

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture.

- Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques dans l'intervalle $[3, +\infty[$ tels que $x_1 \leqslant x_2$.

  On va comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

  Recopier et compléter :

  $$3 \leqslant x_1 \leqslant x_2$$

  $$0 \; \dots \; x_1 - 3 \; \dots \; x_2 - 3 \qquad -3$$

  $$(x_1-3)^2 \; \dots \; (x_2-3)^2 \quad \text{car} \dots$$

  $$(x_1-3)^2 - 1 \; \dots \; (x_2-3)^2 - 1 \qquad -1$$

  $$f(x_1) \quad \dots \quad f(x_2)$$

  Conclure.

- Faire de même pour $]-\infty, 3]$.

SUJET

1°) f croissante sur $[3, +\infty[$ ⓐ
f décroissante sur $]-\infty, 3]$ ⓑ

2°) •
$$3 \leqslant x_1 \leqslant x_2$$
$$\Big\downarrow -3$$
$$0 \leqslant x_1 - 3 \leqslant x_2 - 3$$
$$\Big\downarrow \text{fonction carré croissante sur } [0, +\infty[$$
$$(x_1 - 3)^2 \leqslant (x_2 - 3)^2$$
$$\Big\downarrow -1$$
$$(x_1 - 3)^2 - 1 \leqslant (x_2 - 3)^2 - 1$$
$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

d'où le résultat du 1°) ⓐ

•
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant 3$$
$$\Big\downarrow -3$$
$$x_1 - 3 \leqslant x_2 - 3 \leqslant 0$$
$$(x_1 - 3)^2 \geqslant (x_2 - 3)^2$$
$$\Big\downarrow -1$$
$$(x_1 - 3)^2 - 1 \geqslant (x_2 - 3)^2 - 1$$
$$f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

d'où le résultat du 1°) ⓑ

SUJET F

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 2$ et $AD = 1$. A tout réel $x > 0$, on associe le point M tel que les points A, B, M soient alignés dans cet ordre avec $BM = x$. La droite (MC) coupe (AD) en un point N.

Le but de l'exercice est de déterminer une position de M tel que $DN = AM$.

1°) Exprimer DN en fonction de x.

2°) Traduire le problème à l'aide d'une équation.

3°) a) Démontrer que $x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$

b) Résoudre l'équation obtenue au 2°) et conclure.

SUJET G

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = x^2$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.
On note N le milieu de $[OM]$.
Calculer les coordonnées de M en fonction de a;
en déduire les coordonnées de N en fonction de a.

2°) Démontrer que N appartient à la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $y = 2x^2$. (Vérifier que $y_N = (x_N)^2$)

SUJET 2

1°) $M \left| \begin{array}{l} x_M = a \\ y_M = a^2 \end{array} \right.$

$N \left| \begin{array}{l} x_N = \dfrac{x_0 + x_M}{2} = \dfrac{a}{2} \\ y_N = \dfrac{y_0 + y_M}{2} = \dfrac{a^2}{2} \end{array} \right.$

2°) $2(x_N)^2 = 2 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= 2 \times \dfrac{a^2}{2^2}$

$= \dfrac{a^2}{2}$

$= y_N$

$a \in \mathbb{R}$

donc $N \in \mathcal{C}'$

RAPPEL de COURS

$a \in \mathbb{R}$

f est une fonction

$M(x, y) \in \mathcal{C}_f$ revient à dire que $\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ \text{et} \\ y = f(x) \end{cases}$

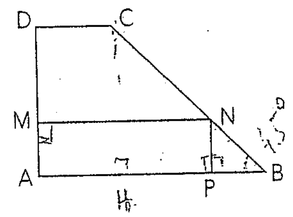
SUJET H

THÈME : FONCTIONS

ABCD est un trapèze rectangle tel que :

AB = 6, CD = 2, AD = 4.

M est un point de [AD] ; on pose AM = x.
On construit le rectangle AMNP inscrit dans ABCD comme sur la figure.



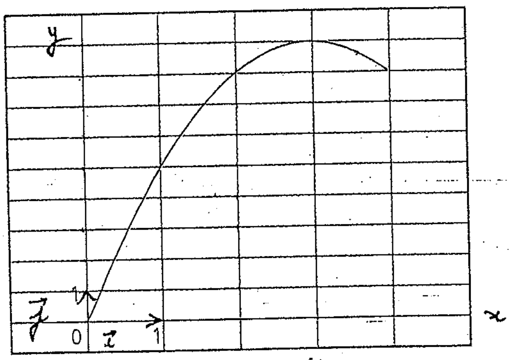
1) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Démontrer que le triangle BCH est isocèle rectangle.
En déduire que le triangle BPN est isocèle rectangle puis que AM = BP = x.

2) À quel intervalle I appartient x ?

3) Démontrer que : aire(AMNP) = $6x - x^2$.

4) Démontrer que : aire(CMB) = $12 - 2x$.

5) On donne ci-dessous la courbe d'équation $y = 6x - x^2$, pour x décrivant l'intervalle I.



a) Reproduire la courbe et tracer sur le même schéma la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 12 - 2x$ pour x élément de I.

b) Lire sur le graphique les coordonnées du point K, intersection des deux courbes. Quels renseignements les coordonnées de ce point donnent-elles à propos des aires de CMB et de AMNP ?

6) On se propose de déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle les aires de AMNP et de CMB sont égales.

a) Développer $(x - 4)^2 - 4$.

b) Écrire l'équation permettant de calculer x pour que les deux aires soient égales.

c) À l'aide de la réponse obtenue au a), résoudre cette équation et conclure.

SUJET H

1°) $CH = AD = 4$

$BH = BA - AH = 6 - 2 = 4$

BCH triangle rect. isocèle en H.

On a : $\widehat{CBH} = 45°$ donc $\widehat{NBP} = 45°$

BPN est donc un triangle rectangle en P qui a un angle de $45°$.

Par suite, BPN est isocèle rectangle en P.

Donc $BP = PN$.

Or $PN = AM = x$

D'où $BP = x$

on peut aussi utiliser un agrandissem^t réduction Thalès BPN est une réduct. de BCH.

2°) $x \in [0, 4]$

3°) $\mathcal{A}_{AMNP} = x \times (6 - x) = 6x - x^2$

4°) $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{(6+2) \times 4}{2} = 16$

$\mathcal{A}_{CMD} = \dfrac{(4-x) \times 2}{2} = 4 - x$

$\mathcal{A}_{ABM} = \dfrac{6 \times x}{2} = 3x$

$$\mathcal{A}_{CMB} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{CMD} + \mathcal{A}_{ABM})$$

$$= 16 - (4 - x + 3x)$$

$$= 16 - (4 + 2x)$$

$$= 12 - 2x$$

5°) b) $K(2,8)$

donc $\mathcal{A}_{CMB} = \mathcal{A}_{AMNP}$ lorsque $x = 2$

6°)

a) $(x-4)^2 - 4 = x^2 - 8x + 16 - 4$

$= x^2 - 8x + 12$

b) $\mathcal{A}_{CMB} = \mathcal{A}_{AMNP}$

équivaut à $6x - x^2 = 12 - 2x$

" " $x^2 - 8x + 12 = 0$

" " $(x-4)^2 - 4 = 0$

" " $(x - 4 + 2)(x - 4 - 2) = 0$

" " $(x-2)(x-6) = 0$

" " $x = 2$ ou $x = 6$

impossible car $x \in [0, 4]$

SUJET I

1°) Encadrer x^2 lorsque $x \in [1, 3]$

<u>Méthode</u> : Compléter le tableau de variation

x	$-\infty$		0	1	3		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	?	?	$\nearrow$	$+\infty$

En déduire l'encadrement.

2°) Encadrer x^2 lorsque $x \in [-1, 2]$

x	$-\infty$	-1		0		2		$+\infty$
x^2	$+\infty$	?	$\searrow$	0	$\nearrow$	?	$\nearrow$	$+\infty$

3°) A quel intervalle apartient x^2 lorsque $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	?	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

SUJET 5

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

A : si $x \leqslant -2$, alors $x^2 \leqslant 4$

B : si $-3 \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$, alors $5 \leqslant x^2 \leqslant 9$

C : tout réel est inférieur ou égal à son carré.

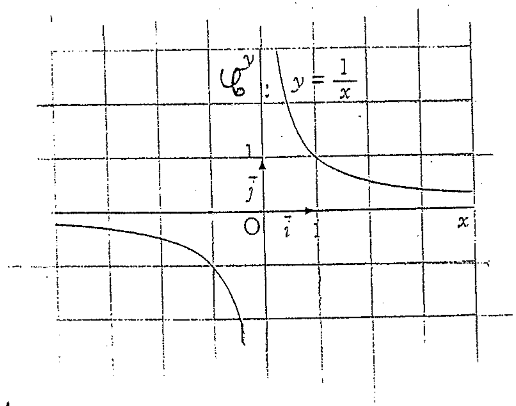
D : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 1$ est l'intervalle $[1, +\infty[$

E : deux réels opposés ont la même image par la fonction carré.

Fonction inverse.

SUJET A

L'hyperbole $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ est représentée ci-contre



Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

a) graphiquement (en rédigeant)

b) par le calcul

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer sur un même graphique la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f et la droite D d'équation réduite $y = x$.

2°) Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} < x$

a) graphiquement b) par le calcul.

SUJET

a) Phrase

b) $\dfrac{2-x}{2x} \leqslant 0$

Tableau de signes

$\Big\}\ S =]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$

2°) a)

b)

$\frac{1}{x} - x \leqslant 0$

$\dfrac{1-x^2}{x} \leqslant 0$

$\dfrac{(1-x)(1+x)}{x} \leqslant 0$

Tableau de signes

$S = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$

SUJET B

On considère la fonction $f : x \longmapsto 2 - \dfrac{5}{x-1}$.

1°) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.
Recopier et compléter :
« On peut conjecturer que :
f est ... sur l'intervalle ... ;
f est ... " " ... . »

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture.

• Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques dans l'intervalle $]1, +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$.
va comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$
Recopier et compléter :

$$1 < x_1 < x_2$$
$$0 \ldots x_1 - 1 \ldots x_2 - 1 \quad \big) -1$$
$$\frac{1}{x_1 - 1} \ldots \frac{1}{x_2 - 1} \quad \text{car} \ldots$$
$$\big) \times(-5) \quad (-5 < 0)$$
$$-\frac{5}{x_1 - 1} \ldots -\frac{5}{x_2 - 1}$$
$$\big) +2$$
$$2 - \frac{5}{x_1 - 1} \ldots 2 - \frac{5}{x_2 - 1}$$
$$f(x_1) \ldots f(x_2)$$

Conclure.

- Faire de même pour $]-\infty, 1[$

3°) Faire le tableau de variation de f.

1°) croissante sur $]1, +\infty[$ (a)

" sur $]-\infty, 1[$ (b)

2°)

$1 < x_1 \leqslant x_2$	$x_1 \leqslant x_2 < 1$
$\Big\downarrow -1$	
$0 < x_1 - 1 \leqslant x_2 - 1$	$x_1 - 1 \leqslant x_2 - 1 < 0$
$\dfrac{1}{x_1 - 1} \geqslant \dfrac{1}{x_2 - 1}$	$\dfrac{1}{x_1 - 1} \geqslant \dfrac{1}{x_2 - 1}$
$\Big\downarrow \times(-5)$	
$-\dfrac{5}{x_1 - 1} \leqslant -\dfrac{5}{x_2 - 1}$	$-\dfrac{5}{x_1 - 1} \leqslant -\dfrac{5}{x_2 - 1}$
$\Big\downarrow +2$	
$2 - \dfrac{5}{x_1 - 1} \leqslant 2 - \dfrac{5}{x_2 - 1}$	$2 - \dfrac{5}{x_1 - 1} \leqslant 2 - \dfrac{5}{x_2 - 1}$
$f(x_1) \leqslant f(x_2)$	$f(x_1) \leqslant f(x_2)$

d'où les résultats du 1°) (a) et (b)

3°)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Var. de f		$\searrow$	‖	$\searrow$	

SUJET C

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2x+1}{x-1}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Calculer les images de $-\frac{1}{3}$ et de $\sqrt{2}$ par f.

3°) Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer les coordonnées des points I et J ainsi précisés :

- I est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe Ox.
- J " " " " " Oy.

b) Le point $M(-9 ; -1,9)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

4°) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 3$.

SUJET

1°) $f(x)$ existe ssi $x-1 \neq 0$

ssi $x \neq 1$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2°) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{4}$

$f(\sqrt{2}) = -3-\sqrt{2}$

3°) a) On résout $f(x) = 0$

$I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

On calcule $f(0)$

$J(0, -1)$

b) On calcule $f(-9)$

$f(-9) = -\frac{19}{10} = -1{,}9$

donc $M \in \mathcal{C}$

4°) $f(x) \geq 3$ équivaut à ... $\frac{-5x+4}{x-1} \geq 0$

$S = \left[\frac{4}{5}, 1\right[$

SUJET

1°) $f(x)$ existe ssi $x-1 \neq 0$

ssi $x \neq 1$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2°) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{4}$

$f(\sqrt{2}) = -3-\sqrt{2}$

3°) a) On résout $f(x)=0$

$I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

On calcule $f(0)$

$J(0, -1)$

b) On calcule $f(-9)$

$f(-9) = -\frac{19}{10} = -1,9$

donc $M \in \mathcal{C}$

4°) $f(x) \geq 3$ équivaut à ... $\frac{-5x+4}{x-1} \geq 0$

$S = \left[\frac{4}{5}, 1\right[$

SUJET 8 Restitution organisée de connaiss.

1°) Rappeler les variations de la fonction de la fonction inverse.

Redémontrer ce résultat.

2°) Applications :

a) Comparer sans calculatrice $\frac{1}{1,1}$ et $\frac{1}{1,2}$

b) Soit x un réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Donner le meilleur encadrement possible de

$\frac{1}{x+3}$.

SUJET D

1°) La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

dém. dans le cours.

2°)

a) $1,1 < 1,2$

donc $\dfrac{1}{1,1} > \dfrac{1}{1,2}$

b) $0 \leqslant x \leqslant 1$ +3

$3 \leqslant x+3 \leqslant 4$

$\dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{x+3} \geqslant \dfrac{1}{4}$

Autres fonctions
(exercices divers ;

SUJET A

THÈMES : FONCTIONS. FACTORISATIONS. TABLEAUX de SIGNES

A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-4)(-3x-5) + x^2 - 16$$

et $$g(x) = (4x-3)^2 - (2x-4)^2.$$

1. Factoriser $f(x)$, $g(x)$, puis $f(x) - g(x)$.

2. À l'aide d'un tableau de signes, déterminer les solutions de chaque inéquation :

a) $f(x) > 0$ (1)

b) $g(x) \leqslant 0$ (2)

c) $f(x) \geqslant g(x)$ (3)

B

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-3)(2x-5) + x^2 - 9$$

et $$g(x) = (4x-3)^2 - (x-1)^2.$$

1. Factoriser $f(x)$, $g(x)$, puis $f(x) - g(x)$.

2. Résoudre alors l'inéquation $f(x) > g(x)$.

C

Un objet est vendu 2 €.

On note x le nombre d'objets vendus par jour.

Le coût de fabrication $C(x)$ journalier est :

$$C(x) = -x^2 + 40x.$$

1. Exprimer, en fonction de x, la recette $R(x)$.

2. Sachant que le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$, montrer que $B(x) = x(x-38)$.

3. À l'aide d'un tableau de signes, déterminer combien faut-il vendre d'objets par jour, pour faire du bénéfice ?

1°) $f(x) = (x-4)(-2x-1)$

$g(x) = (6x-7)(2x+1)$

$f(x)-g(x) = (-2x-1)(7x-11)$

2°) $S_1 =]-\frac{1}{2}, 4[$; $S_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{7}{6}]$

$S_3 = [-\frac{1}{2}, \frac{11}{7}]$

1°) $f(x) = (3x-2)(x-3)$

$g(x) = (3x-2)(5x-4)$

$f(x)-g(x) = (3x-2)(-4x+1)$

2°) $S =]\frac{1}{4}, \frac{2}{3}[$

1°) $R(x) = 2x$

2°) $B(x) = 2x - (-x^2+40x)$

$B(x) = x^2 - 38x$

$B(x) = x(x-38)$

3°) Il faut vendre plus de 38 objets / jour pour faire du bénéfice.

SUJET 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ par $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3x - 1}$.

1°) Calculer $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

2°) Le point $A(0, 4)$ appartient-il à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?

3°) a) Faire le tableau de signes de $f(x)$.

b) Donner le signe de $f(0,3)$ et de $f(-1,99)$ sans faire de calcul.

4°) Déterminer les antécédents de -4 par f.

SUJET C

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et calculer, lorsque c'est possible, les images par f de -3, 0 et 3.

1°) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$

2°) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

3°) $f : x \longmapsto \sqrt{x-3}$

1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\quad f(-3) = \frac{1}{16}$; $f(0) = 1$; $f(3) = \frac{1}{4}$

2°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ $\quad f(-3) = \frac{1}{8}$; $f(0) = -1$; $f(3) = \frac{1}{8}$

3°) $\mathcal{D}_f = [3, +\infty[$

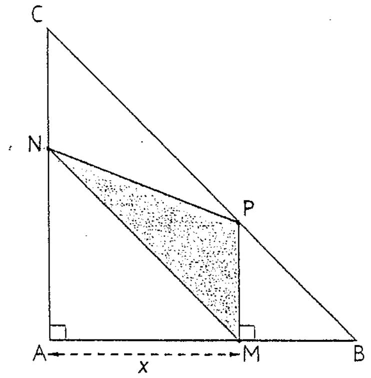
$f(-3)$ et $f(0)$ ne sont pas définis

$f(3) = 0$

SUJET

THÈME : FONCTIONS

ABC est un triangle rectangle, isocèle en A tel que $AB = AC = 4$.
M est un point du segment [AB]. On trace par M la parallèle à (BC) qui coupe [AC] en N et la parallèle à (AC) qui coupe [BC] en P.



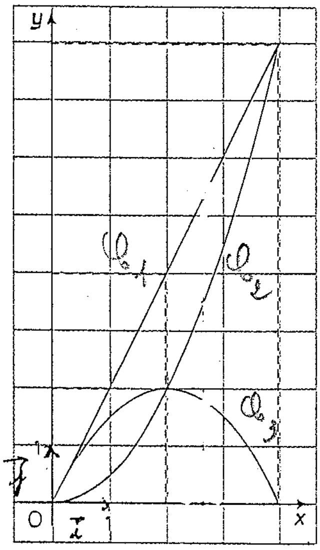
On pose $AM = x$ et on note $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ les aires respectives des triangles AMN, MPN et du trapèze AMPN.

1. Quel est l'ensemble de définition de ces trois fonctions ?

2. Démontrez que les triangles AMN et BMP sont rectangles isocèles et déduisez-en MP en fonction de x.

3. Calculez dans l'ordre $f(x)$, $h(x)$, puis $g(x)$ en fonction de x.

4. Sur la figure qui suit, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f, g, h lorsque x décrit l'intervalle $I = [0 ; 4]$.



Pour chacune des courbes, précisez la fonction qu'elle représente.

5. a) Vérifiez que $g(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-2)^2$.

b) Déduisez-en que pour tout x de I, $g(x) \leq 2$.
Pour quelle valeur de x, $g(x) = 2$?

c) Déduisez-en la nature du quadrilatère AMPN lorsque l'aire de MPN est maximale.

d) Pour quelles valeurs exactes de x, l'aire du triangle MNP est-elle égale à 1 ?

SUJET

1°) $x \in [0, 4]$

Les fonctions f, g, h sont définies sur $[0, 4]$

2°)

Partie 3

Vecteurs

Coordonnées

Equations de droites.

Résumé sur les vecteurs colinéaires

"colinéaires"
pour des vecteurs
non nuls

S.i.G.

- "être portés par des droites parallèles"

ou

- "avoir la même direction"

ou

- "être proportionnels"

Méthode :

En règle générale :

pour démontrer que 2 vecteurs sont colinéaires, on démontre qu'ils sont proportionnels.

(on laisse les deux premières).

Exercices (Niveau 1)

---

(1) A, B, C sont 3 points (pas de fig.)

$\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que $\vec{u}$ est proportionnel à $\overrightarrow{BC}$.

---

(2) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{AC}$

$\vec{v} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

(pas de fig.)

Démontrer que $\vec{u}$ est proportionnel à $\vec{v}$.

---

(3) ABC est un triangle (fig.)

I et J sont les points définis par

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$

Démontrer par un calcul vectoriel que $\overrightarrow{IJ}$ est proportionnel à $\overrightarrow{BC}$; que peut-on en déduire?

(4) ABC est un triangle quelconque.

M et N sont les points définis par

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$

1°) Construire M et N (fig.)

2°) Démontrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont proportionnels ; que peut-on en déduire ?

Exercices (Niveau 1)

(1) $\vec{u} = 2(\vec{AB} - \vec{AC})$

$= 2(\vec{AB} + \vec{CA})$

$= 2\vec{CB}$

$= -2\vec{BC}$

---

(2)

1	-3
$\frac{1}{3}$	-1

$\times \frac{1}{3}$ $\quad$ $\times 3$

Donc $\vec{u} = 3\vec{v}$

---

(3) $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$

$= \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AC}$

$= \frac{2}{3}(\vec{BA} + \vec{AC})$

$= \frac{2}{3}\vec{BC}$

$\vec{IJ}$ est proportionnel à $\vec{BC}$

dc $\vec{IJ}$ est colinéaire à $\vec{BC}$

d'où $(IJ) \parallel (BC)$

(7)

1	2
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

$\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AM}$$

dc $\overrightarrow{AN}$ est proportionnel à $\overrightarrow{AM}$

d'où $\overrightarrow{AN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$.

Comme $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ ont un point commun, on en déduit que les points A, M, N sont alignés.

Exercices (Niveau 2)

---

(1) A et B sont deux points distincts du plan.

M est le point défini par $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1°) En remplaçant $\overrightarrow{MB}$ par $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ dans l'égalité exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2°) Placer le point M.

---

(2) ABC est un triangle.

M est le point défini par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

N " " " $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1°) Figure.

2°) Par un calcul vectoriel, exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) Démontrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont proportionnels ; que peut-on en déduire ?

---

(3) ABC est un triangle.

Les points I et J sont tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

1°) Exprimer $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) En déduire que (IC) et (BJ) sont parallèles.

SUJET

THÈMES : VECTEURS. COORDONNÉES

Soit ABCD un rectangle. On note I le milieu de [AD], J le symétrique de I par rapport à D et K le point tel que $\overrightarrow{AK} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que les points C, J, K sont alignés en utilisant deux méthodes indépendantes.

- Méthode 1

  1°) Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

  2°) Démontrer que C, J, K sont alignés.

- Méthode 2

  1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{JA}$.

  2°) Exprimer $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

  3°) En déduire $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{JC}$ et que les points C, J, K sont alignés.

Méthode 1

1°) $A(0,0)$; $B(1,0)$; $C(1,1)$; $D(0,1)$

$I(0,\frac{1}{2})$; $J(0,\frac{3}{2})$; $K(3,0)$

2°) $\overrightarrow{CJ}\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{CK}(2,-1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1) - \frac{1}{2}\times 2$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

donc ...

Méthode 2

1°) $\overrightarrow{JD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JA}$

2°) $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{JD} + 3\overrightarrow{AB}$

3°) Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{JD} + 3\overrightarrow{DC}$
$$= 3(\underbrace{\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DC}})$$
$$= 3\overrightarrow{JC}$$

$\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{JC}$

donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont colinéaires

...

Equations de droites.

droites

	non parallèle à l'axe des ord.	parallèle à l'axe des ord.
l'équation réduite	$y = mx + p$	$x = k$
vocabulaire	m = coeff. directeur p = ord. à l'origine	
1 vect. directeur	$\vec{u}\,(1, m)$	$\vec{j}$

FORM du COEFF DIR $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$ $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

COND. de PARALLÉLISME de 2 DROITES

$D : y = mx + p$

$D' : y = m'x + p'$

SUJET A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites Δ et Δ' d'équations réduites respectives $y = -2x + 9$ et $y = x + 3$. La droite Δ coupe l'axe des ordonnées en un point A ; la droite Δ' coupe l'axe des abscisses en un point B ; les droites Δ et Δ' se coupent en C. On note D le point tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Faire une figure.

1°) Calculer les coordonnées de A, B, C.

2°) Calculer les coordonnées de D.

3°) Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme ABCD.

SUJET A

1°) A(0, 9)

B(-3, 0)

C (2, 5)

2°) $\vec{CD} = \vec{BA}$

D (5, 14)

3°) I milieu de [AC]

I (1, 7)

SUJET B

THÈMES : ÉQU. de droites
COORD.

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite Δ d'équation réduite $y = 2x - 2$.

1°) Tracer Δ.

2°) Soit A le point de Δ d'abscisse 1 et B le point de Δ d'ordonnée -6.
Calculer les coordonnées des points A et B.

3°) Soit Δ' la droite passant par le point $C(2, 9)$ et de coefficient directeur -3.
a) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ' puis tracer Δ' sur la figure du 1°).
b) Déterminer l'équation réduite de Δ'.

4°) Soit D le point de Δ' d'abscisse 3.
Calculer les coordonnées de D.

5°) Quelle est la nature du quadrilatère ABOD ?

SUJET B

2°) $A(1, 0)$

$B(-2, -6)$

3°) a) $\vec{u}(1, -3)$

b) $\Delta' : \ y = -3x + 15$

4°) $D(3, 6)$

5°) $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -3 \\ -6 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DO} \begin{vmatrix} -3 \\ -6 \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DO}$$

donc le quadrilatère ABOD est un parallélogramme.

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on on donne les points $A(7, 0)$, $B(-1, 2)$ et $C(6, 7)$.

Faire une figure propre (pointillés et valeurs sur les axes).

1°) Calculer les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [AB] et [BC].

2°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
On se propose de déterminer les coordonnées de G par deux méthodes indépendantes.

1ère méthode :

- déterminer l'équation réduite de (CI) et de (AJ).
- en déduire les coordonnées de G.

2e méthode :

On sait que $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AJ}$.
(car le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet)

A l'aide de cette égalité, retrouver les coordonnées de G.

SUJET C

SUJET C

1°) $I \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $\qquad$ $J \left| \begin{matrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{matrix} \right.$

2°)

1ère méthode :

(CI) : $y = 2x - 5$

(AJ) : $y = -x + 7$

système

$G(4, 3)$

2e méthode :

$$\begin{cases} x_G - x_A = \frac{2}{3}(x_J - x_A) \\ y_G - y_A = \frac{2}{3}(y_J - y_A) \end{cases}$$

SUJET D.

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal du plan, l'unité étant le centimètre.

Soit les points $A(-3\,;-1)$ $B(3\,;1)$, $C(4\,;\ -2)$

1. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

2. Calculer AB, AC et BC.

Le triangle ABC est-il rectangle.

3. Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Donner les coordonnées du point D.

4. Soit E le symétrique de D par rapport à C.
Calculer les coordonnées de E.

5. Tracer la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

6. Quel est le coefficient directeur de Δ ? Donner un vecteur directeur de Δ. réduite

7. Donner l'équation de la droite (AD).

8. Les droites (AD) et Δ sont-elles sécantes ?

Si oui, on notera K le point d'intersection et on calculera ses coordonnées.

9. Soit $F\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$. Les points A, B et F sont-ils alignés ?

2°) $AB = 2\sqrt{10}$; $BC = \sqrt{10}$; $AC = 5\sqrt{2}$

ABC rectangle en B.

3°) $D(-2, -4)$

4°) $E(10, 0)$

5°)

6°) coeff. dir. de Δ : $\frac{1}{2}$

Le vecteur $\vec{u}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ est un vect. dir. de Δ.

7°) (AD) : $y = -3x - 10$

8°) (AD) et Δ n'ont pas le même coeff. directeur donc elles ne sont pas parallèles. Par suite, elles sont sécantes en un point K.

$K\left(-\frac{19}{7}, -\frac{13}{7}\right)$

9°) $\vec{AB}(6, 2)$ $\vec{AF}(13, 4)$

$$\begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \times 4 - 2 \times 13 = -2 \neq 0$$

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AF}$ ne sont pas colinéaires

d'où A, B, F ne sont pas alignés

SUJET E

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

Soit les points $A(-3 ; -1)$, $B(1 ; -2)$ et $C(0 ; -7)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Déterminer une équation de la droite (AC).

3. Déterminer les coordonnées de E, le symétrique de D par rapport à C.

4. Déterminer les coordonnées du point F de la droite (AC) d'abscisse -1.

5. Donner les coordonnées de I, le milieu du segment $[AE]$.

6. Montrer que les points D, F et I sont alignés.

Que représente F pour le triangle ADE ?

réduite

7. Donner l'équation de la droite (DF).

8. La droite (DF) est-elle sécante à l'axe des abscisses ?

Si oui, donner alors les coordonnées de G le point d'intersection.

$\to D(-4,-6)$

$y = -2x - 7$

$E(4,-8)$

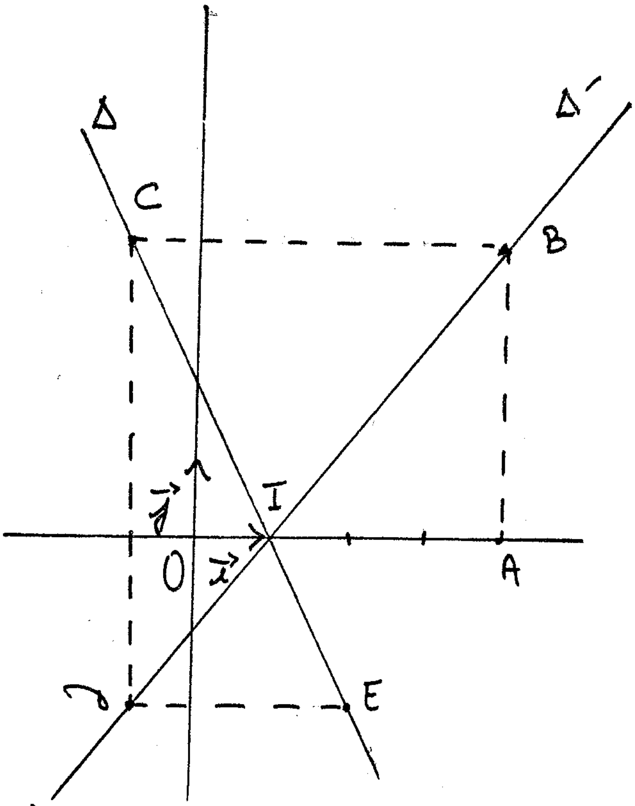
$F(-1,-5)$

$I\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$

$G(14,0)$

SUJET F



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Les droites Δ et Δ' sur la figure ci-contre ont pour équations réduites respectives $y = 2x + 2$ et $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$.

A partir du point $A(4, 0)$, on construit successivement les points B, C, D, E de la manière suivante :

- $B \in \Delta'$ et B a la même abscisse que A
- $C \in \Delta$ et C a la même ordonnée que B.
- $D \in \Delta'$ et D a la même abscisse que C.
- $E \in \Delta$ et E a la même ordonnée que D.

On précise que I a pour coordonnées $(1, 0)$.

1°) <u>Calculer</u> les coordonnées des points B, C, D, E.

2°) Démontrer que le triangle BIC est isocèle.

3°) Déterminer l'équation réduite des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ ainsi précisées :

$\mathcal{D}_1$ est la médiatrice de $[BC]$

$\mathcal{D}_2$ " " hauteur issue de I dans le triangle BIC

$\mathcal{D}_3$ " " médiane issue de I dans le triangle BIC

$\mathcal{D}_4$ " " parallèle à Δ passant par A.

4°) Déterminer les coordonnées du point F tel que le quadrilatère IBCF soit un parallélogramme.