$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le lundi 4 juin 2018

Dans tout le devoir, A, B, C désignent trois points quelconques. On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$.

Question préliminaire :

En développant $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2$, exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ en fonction de *a*, *b*, *c*.

Dans la suite du devoir, on suppose que B et C sont distincts de A.

On pourra utiliser le résultat établi dans la question préliminaire.

I. Démontrer que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est aigu si et seulement si $a^2 < b^2 + c^2$.

Caractériser de même le cas où l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est obtus et le cas où l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est droit.

II. On note I et J les milieux respectifs de $[\mathrm{BC}]$ et de $[\mathrm{AC}]$.

1°) Exprimer $p = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ en fonction de *a*, *b*, *c*.
Indication : Décomposer convenablement les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ à l'aide de la relation de Chasles.

2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur *a*, *b*, *c* pour que $(\mathrm{AI}) \perp (\mathrm{BJ})$.

Corrigé du DM pour le 4-6-2018

Dans tout le devoir, A, B, C désignent trois points quelconques. On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$.

Question préliminaire :

En développant $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2$, exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ en fonction de *a*, *b*, *c*.

On a $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 = \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ (identité remarquable scalaire).

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{BC}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

On peut ensuite passer des carrés scalaires aux carrés des distances.

On obtient l'égalité $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

Il vient ainsi $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2}$.

Avec les notations précisées au début du devoir, on peut alors écrire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ soit encore $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$.

Dans la suite du devoir, on suppose que B et C sont distincts de A.

On pourra utiliser le résultat établi dans la question préliminaire.

I. Démontrer que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est aigu si et seulement si $a^2 < b^2 + c^2$.

Caractériser de même le cas où l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est obtus et le cas où l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est droit.

On rappelle la propriété suivante du cours pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques non nuls du plan.

- $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est aigu $\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} > 0$
- $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est obtus $\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} < 0$
- $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ est droit $\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Cette propriété donne immédiatement la propriété suivante également donnée dans le cours :

- $\widehat{\text{BAC}}$ est aigu $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}} > 0$
- $\widehat{\text{BAC}}$ est obtus $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}} < 0$
- $\widehat{\text{BAC}}$ est droit $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}} = 0$

- $\widehat{\text{BAC}}$ est aigu $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 < b^2+c^2$$

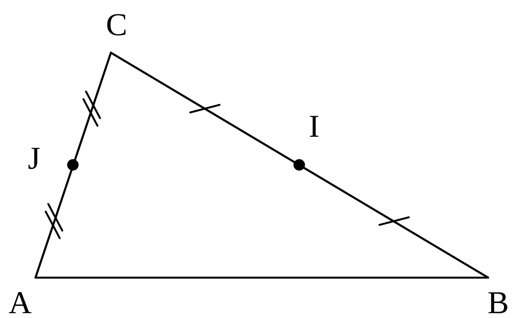
- $\widehat{\text{BAC}}$ est obtus $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}} < 0$

$$\Leftrightarrow a^2 > b^2+c^2$$

- $\widehat{\text{BAC}}$ est droit $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}} = 0$

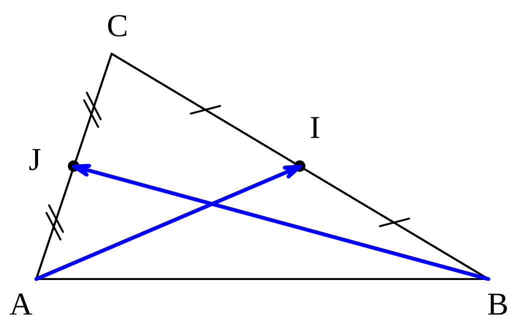
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2+c^2$$

II. On note I et J les milieux respectifs de $[\text{BC}]$ et de $[\text{AC}]$.



1°) Exprimer $p = \overrightarrow{\text{AI}} \bullet \overrightarrow{\text{BJ}}$ en fonction de a, b, c.

Indication : Décomposer convenablement les vecteurs $\overrightarrow{\text{AI}}$ et $\overrightarrow{\text{BJ}}$ à l'aide de la relation de Chasles.



$$p=\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right]\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\mathrm{AB}^2+\frac{1}{2}\mathrm{AC}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-c^2+\frac{1}{2}b^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{b^2+c^2-a^2}{4}-c^2+\frac{1}{2}b^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{a^2+b^2-5c^2}{4}$$

$$=\frac{a^2+b^2-5c^2}{8}$$

2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que $(\mathrm{AI})\perp(\mathrm{BJ})$.

$$(\mathrm{AI})\perp(\mathrm{BJ})\Leftrightarrow p=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2-5c^2}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=5c^2$$