$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 2 mai 2018
(1 heure 10 minutes)

Prénom et nom : ……………………….…………………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point) Questions de cours

1°) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Faire deux phrases commençant par « (u_n) est croissante signifie que … ».
Dans la première phrase, la quantification sera exprimée en français.
Dans la deuxième phrase, la quantification sera écrite sous forme mathématique à l'aide du quantificateur adéquat correctement utilisée.

• ……………………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………………..………………………………………………………………

• ……………………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………………..………………………………………………………………

2°) Soit q un réel distinct de 1 et n un entier naturel. On pose $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k$).

Écrire une formule simplifiée de S_n.

………………………………………………………... (une seule égalité)

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 point ; 3°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{4}{3^{n+2}}$.

1°) Démontrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = \frac{a}{3^{n+2}}$ où a est un réel que l'on précisera.
On présentera les calculs en trois étapes dans la colonne de gauche ci-contre selon le modèle donné.

2°) À l'aide du résultat du 1°), démontrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = b \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ où b est un réel que l'on précisera.
On présentera les calculs en trois étapes dans la colonne de droite ci-contre en reprenant le même modèle qu'au 1°).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{4}{3^{n+2}}$

$= ....$

$= ....$

$= ....$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

3°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (u_n) ainsi que toutes les précisions utiles.

« D'après la question précédente, la suite (u_n) est une suite … ».

……………………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………………..………………………………………………………………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -100$ et de raison $r = \frac{1}{36}$.

1°) Calculer la somme des termes de u_0 à u_{1008}.

…………………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) À l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme, calculer la somme des inverses des termes de u_0 à u_{1008}.
On donnera la valeur arrondie au centième.

…………………………… (un seul résultat sans égalité)

IV. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point + 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ de la manière suivante :

• $u_0 = -1$;

• chaque terme, sauf le premier, s'obtient en soustrayant 3 au terme précédent et en multipliant par 2 le résultat.

Le but de l'exercice est de déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………………………………….. (une seule égalité)

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 6$. Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 puis conjecturer la nature de la suite (v_n) avec précision.

Il semble que (v_n) est une suite ………………….………………………………………………………….

Le but de la question est de justifier la conjecture émise.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$=$

$=$

$=$

$=$

3°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.

« D'après le calcul de la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

…………………………………………………….………………………………………………….……………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

4°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*. Vérifier au brouillon que l'expression est bien cohérente avec les valeurs des premiers termes de (u_n).

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2.

1°) Déterminer le sens de variation de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

a) Calculer « à la main » la valeur de $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ sans faire appel à une formule.

$S_3 =$ .... (une seule égalité)

b) Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).
Compléter l'égalité ci-dessous en donnant le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*. Écrire le détail des calculs sur les lignes ci-dessous.

$S_n =$ .... (un seul résultat)

…………………………………………………………………….…………………………………………………

…………………………………………………………………….…………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

…………………………………………………….…………………………………………………………………

Conseils

II. Pour les questions 1°) et 2°), on n'est pas obligé d'écrire à la fin $a = ...$ et $b = ...$.

III. Dans tout l'exercice, on considère la suite arithmétique (u_n) vérifiant les conditions de l'énoncé.
1°) On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

V. 2°) b) Le résultat peut être en fonction de $n+1$.

Corrigé du contrôle du 2-5-2018

I.

1°) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Faire deux phrases commençant par « (u_n) est croissante signifie que … ».

Dans la première phrase, la quantification sera exprimée en français.

Dans la deuxième phrase, la quantification sera écrite sous forme mathématique à l'aide du quantificateur adéquat correctement utilisée.

• (u_n) est croissante signifie que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

(u_n) est croissante signifie que $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.

• (u_n) est croissante signifie que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$.

2°) Soit q un réel distinct de 1 et n un entier naturel. On pose $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k$).

Écrire une formule simplifiée de S_n.

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ (une seule égalité)}$$

On peut aussi écrire $S_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2}{3^n} - \dfrac{1}{3^{n+1}} + \dfrac{4}{3^{n+2}}$.

1°) Démontrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = \dfrac{a}{3^{n+2}}$ où a est un réel que l'on précisera.

On présentera les calculs en trois étapes dans la colonne de gauche ci-contre selon le modèle donné.

2°) À l'aide du résultat du 1°), démontrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = b \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ où b est un réel que l'on précisera.

On présentera les calculs en trois étapes dans la colonne de droite ci-contre en reprenant le même modèle qu'au 1°).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{4}{3^{n+2}}$$

$$= \frac{2\times 3^2}{3^n \times 3^2} - \frac{1\times 3}{3^{n+1}\times 3} + \frac{4}{3^{n+2}}$$

$$= \frac{18}{3^{n+2}} - \frac{3}{3^{n+2}} + \frac{4}{3^{n+2}}$$

$$= \frac{19}{3^{n+2}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 19 \times \frac{1}{3^{n+2}}$$

$$= 19 \times \frac{1}{3^n \times 9}$$

$$= \frac{19}{9} \times \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{19}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (u_n) ainsi que toutes les précisions utiles.

« D'après la question précédente, la suite (u_n) est une suite … ».

D'après la question précédente, la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{19}{9}$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

III.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -100$ et de raison $r = \dfrac{1}{36}$.

1°) Calculer la somme des termes de u_0 à u_{1008}.

– 86 774 (un seul résultat sans égalité)

On cherche à calculer $S = \sum_{k=0}^{k=1008} u_k$.

Il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$S = 1009 \times \frac{-100 + u_{1008}}{2}$$

$$u_{1008} = -100 + \frac{1}{36} \times 1008 = -72$$

$$S = 1009 \times \frac{-100-72}{2}$$

$$= 1009 \times (-86)$$

$$= -86\ 774$$

2°) À l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme, calculer la somme des inverses des termes de u_0 à u_{1008}.
On donnera la valeur arrondie au centième.

– 11,84 (un seul résultat sans égalité)

On cherche à calculer $S' = \sum_{k=0}^{k=1008} \frac{1}{u_k}$.

On peut écrire $S' = \sum_{k=0}^{k=1008} \frac{1}{\frac{k}{36} - 100}$ ce qui est pratique pour la calculatrice.

La calculatrice est assez lente. La calculatrice donne comme affichage : – 11,83809107.

IV.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ de la manière suivante :

- $u_0 = -1$;
- chaque terme, sauf le premier, s'obtient en soustrayant 3 au terme précédent et en multipliant par 2 le résultat.

Le but de l'exercice est de déterminer l'expression de u_n en fonction de *n*.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2(u_n - 3)$ (une seule égalité)

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 6$. Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 puis conjecturer la nature de la suite (v_n) avec précision.

On effectue les calculs à la main.

On peut éventuellement rentrer la suite (u_n) dans la calculatrice.

$u_1 = -8$, $u_2 = -22$, $u_3 = -50$, $u_4 = -106$, $u_5 = -218$
$v_0 = -7$, $v_1 = -14$, $v_2 = -28$, $v_3 = -56$, $v_4 = -112$, $v_5 = -224$

Il semble que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

Le but de la question est de justifier la conjecture émise.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$= 2(u_n - 3) - 6$

$= 2u_n - 12$

$= 2(u_n - 6)$

$= 2v_n$

3°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.
« D'après le calcul de la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

D'après le calcul de la question précédente, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -7$ et de raison 2.

4°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*. Vérifier au brouillon que l'expression est bien cohérente avec les valeurs des premiers termes de (u_n).

La formule donnant le terme général d'une suite géométrique nous permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -7 \times 2^n$.

Or on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 6$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 6 - 7 \times 2^n$.

V.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2.

1°) Déterminer le sens de variation de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

On applique directement la propriété du cours donnant le sens de variation d'une suite géométrique.
(u_n) est une suite géométrique.

Son premier terme est strictement négatif et sa raison est strictement supérieure à 1 donc la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

Autre méthode :

On peut aussi calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de *n* puis étudier le signe de la différence.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

a) Calculer « à la main » la valeur de $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ sans faire appel à une formule.

$S_3 = -45$ (une seule égalité)

$S_3 = -3-6-12-24$

$= -45$

b) Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).
Compléter l'égalité ci-dessous en donnant le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*. Écrire le détail des calculs sur les lignes ci-dessous.

$$S_n = 3\left(1-2^{n+1}\right) \text{ (un seul résultat)}$$

La somme S_n comporte $n+1$ termes.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = -3 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$= -3 \times \frac{1-2^{n+1}}{-1}$$

$$= 3 \times \left(1-2^{n+1}\right)$$

On peut facilement tester la formule obtenue pour $n = 0$.

On a $3 \times \left(1-2^{0+1}\right) = 3 \times \left(1-2^1\right) = 3 \times (1-2) = 3 \times (-1) = -3$.

Or $S_0 = \sum_{k=0}^{k=0} u_k = u_0 = -3$.

On obtient bien le même résultat.

Grâce à cette expression, on peut vérifier (retrouver) la valeur de $S_3 = -3-6-12-24$ calculée à la question précédente.

$S_3 = 3 \times \left(1-2^{3+1}\right) = 3 \times \left(1-2^4\right) = 3 \times (-15) = -45$