1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 11 avril 2018
(1 h 10 minutes)

Prénom et nom : ……………………….…………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = a$ où a est un réel non nul fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{nu_n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_4 et u_5 en fonction de a.
On détaillera les calculs dans les colonnes ci-dessous.

…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..	…………………………..

2°) Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

…………………………………………………………………………..……………………………………………………

…………………………………………………………………………..……………………………………………………

…………………………………………………………………………..……………………………………………………

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et telle que chaque terme, sauf le premier, est égal à la somme du précédent et de l'inverse du précédent.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ………………………………… (une seule égalité)

2°) Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles et on détaillera les calculs sur les lignes ci-contre.

……………… (une seule égalité) ……………… (une seule égalité)

…………………………………………………………………..……………………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………………

…………………………………………………………………..……………………………………………………

3°) On considère l'algorithme ci-dessous. On précise que les variables i et n sont des entiers naturels et que la variable u est un réel.
Compléter l'algorithme pour qu'il affiche, à partir de la valeur de n saisie en entrée ($n \geqslant 1$), les termes u_1, u_2, …, u_n. Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

```
Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 4

Traitement et sortie :
Pour i allant de 1 à …... Faire
|
|       u prend la valeur ……………….
|
|       Afficher u
FinPour
```

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de gaz à effet de serre. En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de gaz à effet de serre au total. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de gaz à effet de serre émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005+n$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (n étant un entier naturel). Répondre sans justifier.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ……………………………………………………… (une seule égalité)

2°) À l'aide de la calculatrice déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de gaz à effet de serre, par rapport à l'année 2005.

………………………… (un seul résultat, sans égalité et sans faire de phrase)

IV. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = -1$ et $u_1 = 3$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel *n*.

« Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice et déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 4 par défaut de u_{10}.

……………………..……… (une seule réponse, sans égalité)

V. (3 points)

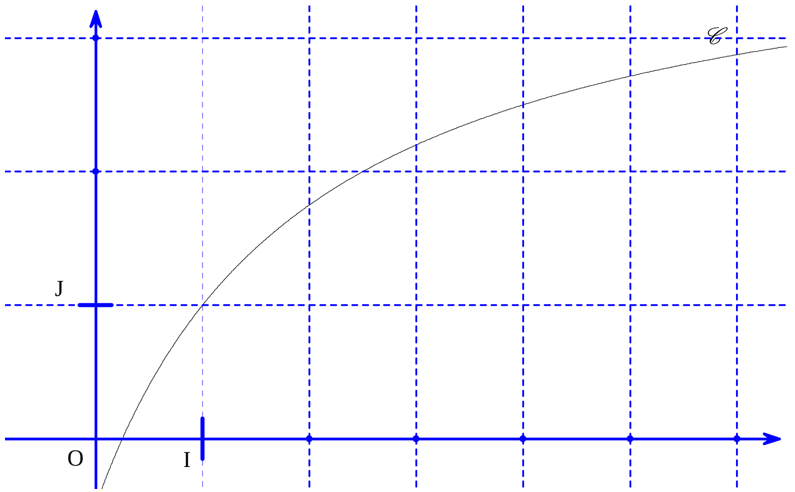
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel *n*.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = \dfrac{4x-1}{x+2}$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

Effectuer avec soin et précision la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Laisser les traits et éléments de construction apparents.

On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.



VI. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par l'égalité $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + (-1)^n}$ pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, on note M_n le point de coordonnées $(n\,;u_n)$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

Démontrer que tous les points M_n d'indice pair sont situés sur la droite *D* d'équation $y = x + 1$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VII. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par l'égalité $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Calculer le produit $u_{2p} \times u_{2p+1}$ où *p* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 11-4-2018

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = a$ où a est un réel non nul fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{nu_n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Calculer u_4 et u_5 en fonction de a.
On détaillera les calculs dans les colonnes ci-dessous.

$u_2 = \dfrac{1}{a}$	$u_3 = \dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{a}} = \dfrac{a}{2}$	$u_4 = \dfrac{1}{3\times\dfrac{a}{2}} = \dfrac{1}{\dfrac{3a}{2}} = \dfrac{2}{3a}$	$u_5 = \dfrac{1}{4\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\dfrac{8}{3a}} = \dfrac{3a}{8}$

On utilise chaque fois que l'inverse d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ est égal à $\dfrac{b}{a}$.
Il n'y a pas de calcul.
Cette propriété s'écrit $\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$.

2°) Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

$$u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)u_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)\dfrac{1}{nu_n}} = \frac{nu_n}{n+1}$$

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et telle que chaque terme, sauf le premier, est égal à la somme du précédent et de l'inverse du précédent.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad \text{(une seule égalité)}$$

2°) Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles et on détaillera les calculs sur les lignes ci-contre.

$u_1 = \dfrac{17}{4}$ (une seule égalité) $\qquad$ $u_2 = \dfrac{305}{68}$ (une seule égalité)

$u_1 = u_0 + \dfrac{1}{u_0} = 4 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{17}{4}$	$u_2 = u_1 + \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{17}{4} + \dfrac{1}{\dfrac{17}{4}} = \dfrac{17}{4} + \dfrac{4}{17} = \dfrac{305}{68}$

3°) On considère l'algorithme ci-dessous. On précise que les variables i et n sont des entiers naturels et que la variable u est un réel.
Compléter l'algorithme pour qu'il affiche, à partir de la valeur de n saisie en entrée ($n \geqslant 1$), les termes u_1, u_2, …, u_n. Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 4

Traitement et sortie :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
 u prend la valeur $u + \dfrac{1}{u}$
 Afficher u
FinPour

III.

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de gaz à effet de serre. En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de gaz à effet de serre au total. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de gaz à effet de serre émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005+n$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (n étant un entier naturel). Répondre sans justifier.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 0{,}98u_n + 0{,}2 \quad \text{(une seule égalité)}$$

Il faut bien convertir 200 tonnes en milliers de tonnes (d'où le 0,2).

2°) À l'aide de la calculatrice déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de gaz à effet de serre, par rapport à l'année 2005.

2059 (un seul résultat, sans égalité et sans faire de phrase)

On tape :

nMin = 0
$\text{u}(n) = 0.98\text{u}(n-1) + 0.2$ ou si la calculatrice a été mise à jour avec le TYPE SEQ(n+1) : $\text{u}(n+1) = 0.98\text{u}(n) + 0.2$
$\text{u}(0) = \{41\}$

Pour taper u, faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{7}$.
En dépit de l'inscription u_n qui figure au-dessus de la touche $\boxed{7}$, la calculatrice n'écrit pas d'indice.
Il faut écrire $n-1$ (entre parenthèses).

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = -1$ et $u_1 = 3$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n.

« Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice et déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 4 par défaut de u_{10}.

0,0013 (une seule réponse, sans égalité)

On commence par mettre la calculatrice en mode « suite ».

Pour la calculatrice, on transcrit la relation de récurrence « $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n + 2}$ » en mode fonctionnel sous la forme

$u(n+2) = \dfrac{u(n+1)}{u(n)+2}$ (la calculatrice n'écrit pas d'indice).

Il faudra taper exactement ça.

On appuie sur la touche $\boxed{\text{f(x)}}$.

En haut de l'écran, on sélectionne le type SUITE($n+2$) car la suite est définie par une relation de récurrence d'ordre 2.

Pour nMin, on écrira 0.
On devra rentrer les valeurs des deux premiers termes.

Pour écrire u, faire $\boxed{\text{2nde}}$ 7 et pour n, on utilise la touche $\boxed{\text{X},T,\theta,\text{ n}}$.

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{fenêtre}}$ (déf table)

Début Tbl = 0
ΔTbl = 1

On obtient le tableau de valeurs suivant :

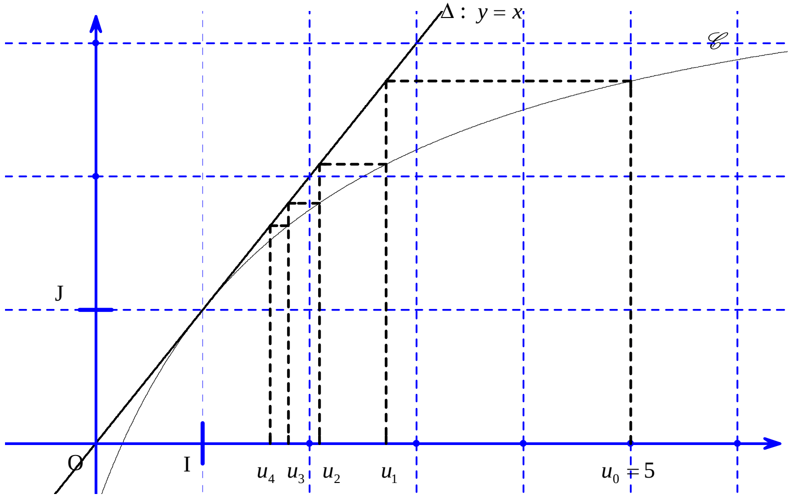
n	u
0	-1
1	3
2	3
3	$\dfrac{3}{5}$
4	$\dfrac{3}{25}$
5	$\dfrac{3}{65}$

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = \dfrac{4x-1}{x+2}$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Effectuer avec soin et précision la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).
Laisser les traits et éléments de construction apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.



VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par l'égalité $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + (-1)^n}$ pour tout entier naturel n.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point de coordonnées $(n\,;u_n)$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O, I, J})$.
Démontrer que tous les points M_n d'indice pair sont situés sur la droite D d'équation $y = x + 1$.

On doit démontrer que tous les poins M_n d'indice pair appartiennent à la droite D d'équation $y = x + 1$.

On doit donc démontrer que pour tout entier naturel n pair le point M_n appartient à la droite D d'équation $y = x + 1$ c'est-à-dire que ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

L'abscisse de M_n est égale à n.

L'ordonnée de M_n est égale à u_n.

Soit n un entier naturel pair quelconque.

$u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1}$ (en effet, comme n est pair, on a $(-1)^n = 1$)

$= \sqrt{(n+1)^2}$

$= |\, n+1 \,|$ (il ne faut pas oublier la valeur absolue)

$= n+1$ car $n+1 \geqslant 0$ puisque n est un entier naturel (étape essentielle à écrire)

On a donc $y_{\mathrm{M}_n} = x_{\mathrm{M}_n} + 1$.

Ainsi, pour n pair, le point M_n est situé sur la droite D d'équation $y = x + 1$.

Attention : On ne peut pas définir la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + (-1)^x}$.
En effet, on ne peut calculer $(-1)^x$ que pour x entier relatif. Autrement dit $(-1)^x$ n'est pas défini pour x non entier relatif : pour s'en convaincre, on pourra par exemple faire des essais sur la calculatrice (par exemple, en tapant $(-1)^\pi$).

VII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par l'égalité $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Calculer le produit $u_{2p} \times u_{2p+1}$ où p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.

On commence par calculer séparément u_{2p} et u_{2p+1}.

$$\begin{aligned} u_{2p} &= 1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p} \\ &= 1 + \frac{1}{2p} \quad \text{car } (-1)^{2p} = 1 \\ &= \frac{2p+1}{2p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2p+1} &= 1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2p+1} \quad \text{car } (-1)^{2p+1} = -1 \\ &= \frac{2p}{2p+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2p} \times u_{2p+1} &= \frac{\cancel{2p+1}}{\cancel{2p}} \times \frac{\cancel{2p}}{\cancel{2p+1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$