1^{ère} S1

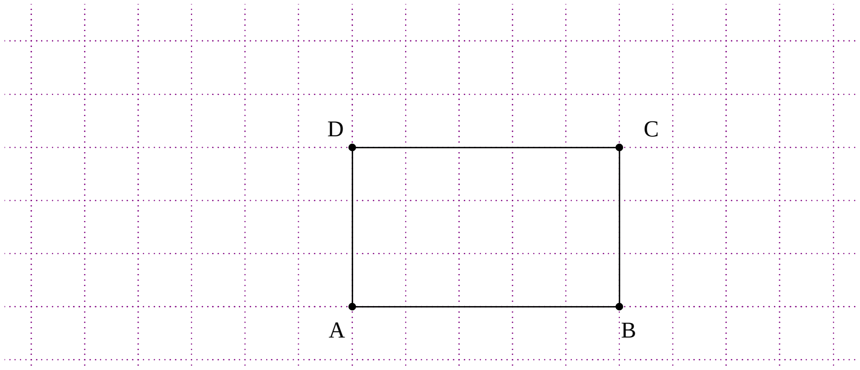
Contrôle du mercredi 28 mars 2018 (60 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Le plan est quadrillé par des carrés qui ont pour côté 1. Les points A, B, C, D sont sur le quadrillage.



1°) Placer le point E de la droite (AD) tel que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AD} = -15$ puis le point F de la droite (BC) tel que $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$.

2°) Le but de cette question est de calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE}$.
Compléter la troisième ligne du calcul ci-dessous en écrivant une somme de quatre produits scalaires puis finir le calcul sur les lignes suivantes en donnant les explications utiles.

$p = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE}$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}\right)$

………

………

………

………

………

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Dans le plan *P*, on donne trois points A, B, C tels que B soit le milieu de $[AC]$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1°) Démontrer que pour tout point M de *P*, on a : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.

………

………

………

………

2°) Compléter par des produits scalaires égaux à 0 les lignes du cadre suivant.

Soit M un point quelconque de *P*.

$M \in E \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

3°) À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

L'ensemble *E* est ……………………………………………………………………………

Faire une figure dans l'emplacement ci-dessous et tracer avec soin l'ensemble *E*.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $p=\frac{3}{7}$. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Déterminer la plus petite valeur de n telle que l'espérance de X soit supérieure ou égale à 20. Pour cette valeur de n, calculer l'espérance mathématique et la variance de X (résultats sous forme de fractions irréductibles).
Donner le détail de la démarche sur les lignes qui suivent.

$n=$......... $\mathrm{E}(\mathrm{X})=$................. $\mathrm{V}(\mathrm{X})=$.................

....

....

....

....

2°) Dans cette question, on prend $n=4$.
Calculer $P(\mathrm{X}\geqslant 3)$. On donnera la résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

IV. (2 points : 1 point par résultat)

Un client appelle à cinq reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de 0,75.
Calculer la probabilité des événements A : « Le client a subi exactement deux attentes » et B : « Le client a subi au moins deux attentes ». On donnera les valeurs arrondies au millième de chaque résultat.

....

V. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point par réponse)

Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque :

- 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
- 4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons.
On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

1°) L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsqu'il a marqués au moins 8 buts.
Calculer la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement.

.... (un seul résultat sans égalité)

2°) Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours de ces 10 entraînements, c'est-à-dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts. Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec. On donnera les valeurs arrondies au millième de chaque résultat.
Calculer pour un joueur :
a) la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
b) la probabilité d'avoir exactement 6 succès.
c) la probabilité d'avoir au moins 3 succès.

a)

.... (un seul résultat sans égalité)

b)

.... (un seul résultat sans égalité)

c)

.... (un seul résultat sans égalité)

Indications orales :

I.

1°) « explications utiles » c'est-à-dire que l'on doit expliquer avec des mots.

II.

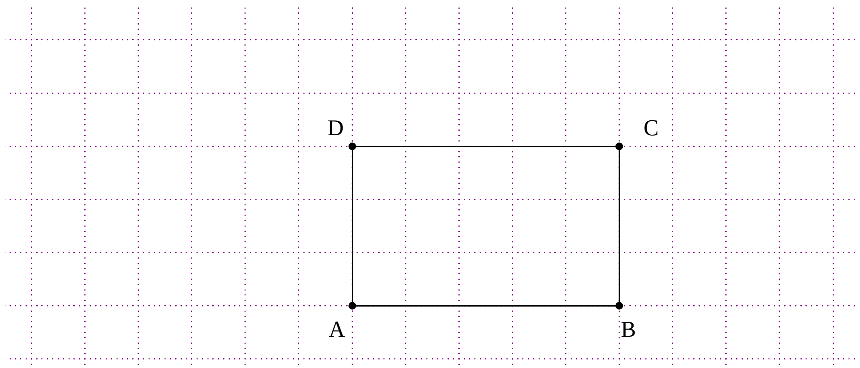
2°) On n'écrira que des produits scalaires.
Il faut bien compléter les 3 lignes.

3°) Attention aux notations.

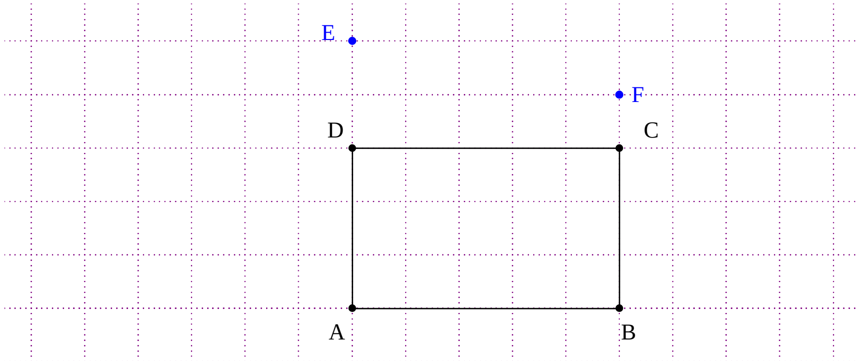
Corrigé du contrôle du 28-3-2018

I.

Le plan est quadrillé par des carrés qui ont pour côté 1. Les points A, B, C, D sont sur le quadrillage.



1°) Placer le point E de la droite (AD) tel que $\overrightarrow{\text{EA}} \bullet \overrightarrow{\text{AD}} = -15$ puis le point F de la droite (BC) tel que $\overrightarrow{\text{FE}} \bullet \overrightarrow{\text{BC}} = 3$.



Le point E se place aisément grâce à la propriété du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

Le point F se place grâce à la formule du produit scalaire utilisant le projeté orthogonal.

2°) Le but de cette question est de calculer le produit scalaire $p = \overrightarrow{\text{AF}} \bullet \overrightarrow{\text{BE}}$.
Compléter la troisième ligne du calcul ci-dessous en écrivant une somme de quatre produits scalaires puis finir le calcul sur les lignes suivantes en donnant les explications utiles.

$p = \overrightarrow{\text{AF}} \bullet \overrightarrow{\text{BE}}$

$= \left(\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BF}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AE}}\right)$

$= \overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{BF}} \bullet \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{BF}} \bullet \overrightarrow{\text{AE}}$

$= -5^2 + 0 + 0 + 4 \times 5$ (les 0 correspondent à des produits scalaires de vecteurs orthogonaux ; les autres produits scalaires se calculent par la propriété du produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux)

$= -25 + 20$

$= -5$

II.

Dans le plan *P*, on donne trois points A, B, C tels que B soit le milieu de $[\text{AC}]$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\left(\overrightarrow{\text{MA}} - 2\overrightarrow{\text{MB}}\right) \bullet \overrightarrow{\text{MB}} = 0$.

1°) Démontrer que pour tout point M de *P*, on a : $\overrightarrow{\text{MA}} - 2\overrightarrow{\text{MB}} = -\overrightarrow{\text{MC}}$.

La meilleure méthode consiste à partir du membre de gauche de l'égalité qu'il faut démontrer.

$\forall \text{M} \in P \quad \overrightarrow{\text{MA}} - 2\overrightarrow{\text{MB}} = \overrightarrow{\text{MC}} + \overrightarrow{\text{CA}} - 2\left(\overrightarrow{\text{MC}} + \overrightarrow{\text{CB}}\right)$

$= -\overrightarrow{\text{MC}} + \overrightarrow{\text{CA}} - 2\overrightarrow{\text{CB}}$

$= -\overrightarrow{\text{MC}}$ ($\overrightarrow{\text{CA}} - 2\overrightarrow{\text{CB}} = \vec{0}$ car B est le milieu de $[\text{AC}]$ par hypothèse)

2°) Compléter par des produits scalaires égaux à 0 les lignes du cadre suivant.

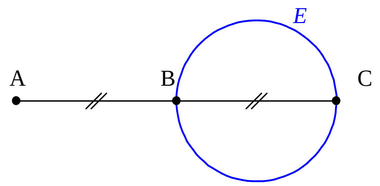
> Soit M un point quelconque de *P*.
>
> $\text{M} \in E \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{MA}} - 2\overrightarrow{\text{MB}}\right) \bullet \overrightarrow{\text{MB}} = 0$
>
> $\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{\text{MC}}\right) \bullet \overrightarrow{\text{MB}} = 0$
>
> $\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{\text{MC}} \bullet \overrightarrow{\text{MB}}\right) = 0$ [autre possibilité : $\overrightarrow{\text{CM}} \bullet \overrightarrow{\text{MB}} = 0$*eeeee*]
>
> $\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MC}} \bullet \overrightarrow{\text{MB}} = 0$

3°) À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

Avec la condition $\overrightarrow{\text{MC}} \bullet \overrightarrow{\text{MB}} = 0$, on reconnaît un lieu d'orthogonalité de référence.

L'ensemble E est $\boxed{\text{le}}$ cercle de diamètre $[BC]$.

Faire une figure dans l'emplacement ci-dessous et tracer avec soin l'ensemble E.



On fait une figure avec les codages de longueur.

III.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $p=\frac{3}{7}$. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Déterminer la plus petite valeur de n telle que l'espérance de X soit supérieure ou égale à 20. Pour cette valeur de n, calculer l'espérance mathématique et la variance de X (résultats sous forme de fractions irréductibles).
Donner le détail de la démarche sur les lignes qui suivent.

$n=47$ $\qquad$ $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{141}{7}$ $\qquad$ $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{564}{49}$

On sait que $\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\times p$ soit $\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\times\frac{3}{7}=\frac{3n}{7}$.

On cherche $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{E}(\mathrm{X})\geqslant 20 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \frac{3n}{7}\geqslant 20$

$\Leftrightarrow n\geqslant\frac{140}{3}$

On a $\frac{140}{3}=46,6\underline{6}...$ (on pose la division euclidienne ou on utilise la calculatrice).

L'entier naturel n cherché est donc 47.

En remplaçant n par 47 dans la formule de l'espérance de X, on obtient immédiatement $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{141}{7}$.

On applique ensuite la formule de la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale, on obtient

$\mathrm{V}(\mathrm{X})=np(1-p)=47\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{564}{49}$.

2°) Dans cette question, on prend $n=4$.
Calculer $P(\mathrm{X}\geqslant 3)$. On donnera la résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$P(\mathrm{X}\geqslant 3)=P(\mathrm{X}=3)+P(\mathrm{X}=4)$

$=\binom{4}{3}\times\left(\frac{3}{7}\right)^3\times\left(\frac{4}{7}\right)^1+\left(\frac{3}{7}\right)^4$

$=4\times\frac{27}{343}\times\frac{4}{7}+\frac{81}{2401}$

$=4\times\frac{27}{343}\times\frac{4}{7}+\frac{81}{2401}$

$=\frac{513}{2401}$

La valeur de $\binom{4}{3}$ s'obtient en effectuant le calcul $\frac{4\times3\times2}{1\times2\times3}$ ou à l'aide de la calculatrice ou encore à l'aide du triangle de Pascal.

Remarque : On peut écrire $P(\mathrm{X}\geqslant 3)=1-P(\mathrm{X}<3)$ mais comme on effectue le calcul à la main, cela ne présente ici pas d'intérêt.

IV.

Un client appelle à cinq reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de 0,75.
Calculer la probabilité des événements A : « Le client a subi exactement deux attentes » et B : « Le client a subi au moins deux attentes ». On donnera les valeurs arrondies au millième de chaque résultat.

0,264 $\qquad$ 0,367

On note X le nombre d'attente subies par le client lors des cinq appels.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,25$.

$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{X}=2)$

$=\binom{5}{2}\times 0,25^2\times 0,75^3$

$=10\times 0,75^2\times 0,25^3$ (on obtient la valeur du coefficient binomiale par la calculatrice, par le triangle de Pascal ou par la formule de calcul $\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2\times1}$)

$=0,263671875$

$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{X} \geqslant 2)$

$= 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 1)$

$= 0,367185$

V.

Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque :

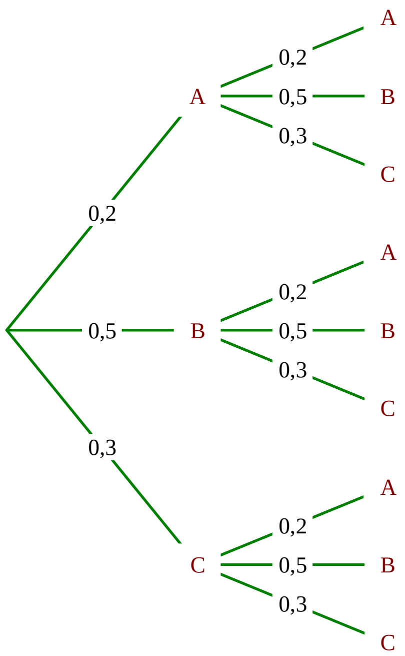
- 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
- 4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons.
On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

1°) L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsqu'il a marqués au moins 8 buts.
Calculer la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement.

0,61 (un seul résultat sans égalité)

On dresse un arbre à deux niveaux avec les événements A : « Le joueur marque 5 buts », B : « Le joueur marque 4 buts », C : « Le joueur marque 3 buts ».



La probabilité cherchée est égale à $0,2\times 0,2+0,2\times 0,5+0,2\times 0,3+0,5\times 0,2+0,5\times 0,5+0,3\times 0,2$ qui donne 0,61.

2°) Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours de ces 10 entraînements, c'est-à-dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts. Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec. On donnera les valeurs arrondies au millième de chaque résultat.
Calculer pour un joueur :
a) la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
b) la probabilité d'avoir exactement 6 succès.
c) la probabilité d'avoir au moins 3 succès.

a)

0,007 (un seul résultat sans égalité)

b)

0,250 (un seul résultat sans égalité)

c)

0,990 (un seul résultat sans égalité)

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,61$ (on utilise le résultat de la question 1°).

a) On ne veut obtenir que des succès lors des 10 séances.
On sait que la probabilité d'un succès lors d'une épreuve donc on calcule $0,61^{10}$.