TS spécialité

Contrôle du mardi 27 mars 2018 (50 minutes)

Prénom : …………… **Nom : ………………………………………………** **Note : …. / 20**

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

Soit n un entier relatif. On pose $a=2n+1$ et $b=n(n+3)$.
Le but de l'exercice est de déterminer le PGCD de a et b suivant les valeurs de n.

1°) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le PGCD de a et b suivant les valeurs de n.

……

……

……

……

……

……

2°) On considère un entier naturel d qui divise a et b.
En considérant l'expression $(2n+5)a-4b$, déterminer les valeurs possibles de d.

……

……

……

……

……

……

……

3°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots$ (mod. 5)	0	1	2	3	4
$a \equiv \ldots$ (mod. 5)					
$b \equiv \ldots$ (mod. 5)					

4°) Conclure.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (2 points)

Déterminer le PGCD de 18 et de 1 064 330 258 643. On expliquera succinctement le raisonnement.

……

……

……

……

III. (3 points)

Un jardinier doit planter une haie autour d'une parcelle rectangulaire de longueur 10,2 m et de largeur 7,8 m. Il doit mettre un plant à chaque sommet du rectangle et espacer les plants régulièrement d'un nombre entier de centimètres. Combien de plants au minimum peut-il planter ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (3 points)

Soit p un entier relatif fixé. On considère l'équation $3x+4y=p$ (E) d'inconnue $(x,\, y)\in\mathbb{Z}^2$.

Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(\text{..........}\,;\text{..........})$ ………… ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (2 points)

Quel est le plus petit entier naturel strictement supérieur à 1 tel que le reste de la division euclidienne de cet entier par 2, par 3, par 4, par 5, par 6, par 7, par 8 et par 9 soit 1 ? Expliquer la démarche en détail.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (4 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=n^2+n$.

Déterminer $\mathrm{PGCD}(u_n\,;u_{n+1})$ suivant les valeurs de n.

Indication : Factoriser u_n.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 27-3-2018

I.

Soit n un entier relatif. On pose $a=2n+1$ et $b=n(n+3)$.
Le but de l'exercice est de déterminer le PGCD de a et b suivant les valeurs de n.

1°) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le PGCD de a et b suivant les valeurs de n.

On rentre la fonction $\mathrm{Y1}=\mathrm{pgcd}\left(\left|\,2\mathrm{X}+1\,\right|,\left|\,\mathrm{X}(\mathrm{X}+3)\,\right|\right)$.

À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que le PGCD de a et b est égal à 5 si n est de la forme $2+5k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et égal à 1 si n n'est pas de la forme $2+5k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2°) On considère un entier naturel d qui divise a et b.
En considérant l'expression $(2n+5)a-4b$, déterminer les valeurs possibles de d.

$$\begin{aligned}(2n+5)a-4b&=(2n+5)(2n+1)-4n(n+3)\\&=\cancel{4n^2}+\cancel{12n}+5\cancel{-4n^2}\cancel{-12n}\\&=5\end{aligned}$$

d divise a et b donc d divise la combinaison linéaire $(2n+5)a-4b$ (combinaison linéaire de a et de b à coefficients entiers relatifs) qui est égale à 5.

Les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5 (5 est un nombre premier).

On en déduit que les valeurs possibles de d sont 1 et 5.

3°) Compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n\equiv\ldots$ (mod. 5)	0	1	2	3	4
$a\equiv\ldots$ (mod. 5)	1	3	0	2	4
$b\equiv\ldots$ (mod. 5)	0	4	0	3	3

4°) Conclure.

On sait que le PGCD de a et de b est un diviseur positif de a et b.

Donc d'après la question 2°), le PGCD de a et de b est égal à 1 ou à 5.

1$^{\text{er}}$ cas : n est de la forme $2+5k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

D'après le tableau de congruences, a et b sont alors divisibles par 5.

On en déduit que dans ce cas $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=5$.

2$^{\text{e}}$ cas : n n'est pas de la forme $2+5k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

D'après le tableau de congruences, l'un au moins des entiers a et b n'est pas divisible par 5.

On en déduit que dans ce cas $\mathrm{PGCD}(a\,;b)=1$. Autrement dit, a et b sont premiers entre eux.

II.

Déterminer le PGCD de 18 et de 1 064 330 258 643. On expliquera succinctement le raisonnement.

La calculatrice ne permet pas de trouver le PGCD car le nombre 1 064 330 258 643 est trop grand.

Il faut donc utiliser une autre méthode. On commence par déterminer les diviseurs positifs de 18.

Les diviseurs positifs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9, 18.

1 064 330 258 643 n'est pas divisible par 2 donc n'est pas divisible par 18.

De plus, le somme des chiffres de 164 330 258 643 est égale à 45 qui est un multiple de 9.

D'où $\mathrm{PGCD}(18\,;1\,064\,330\,258\,643)=9$.

III.

Un jardinier doit planter une haie autour d'une parcelle rectangulaire de longueur 10,2 m et de largeur 7,8 m. Il doit mettre un plant à chaque sommet du rectangle et espacer les plants régulièrement d'un nombre entier de centimètres. Combien de plants au minimum peut-il planter ?

On commence par faire une figure et on convertit les dimensions de la parcelle en décimètres ou en centimètres.

Le rectangle a pour longueur 1020 cm et 780 cm.

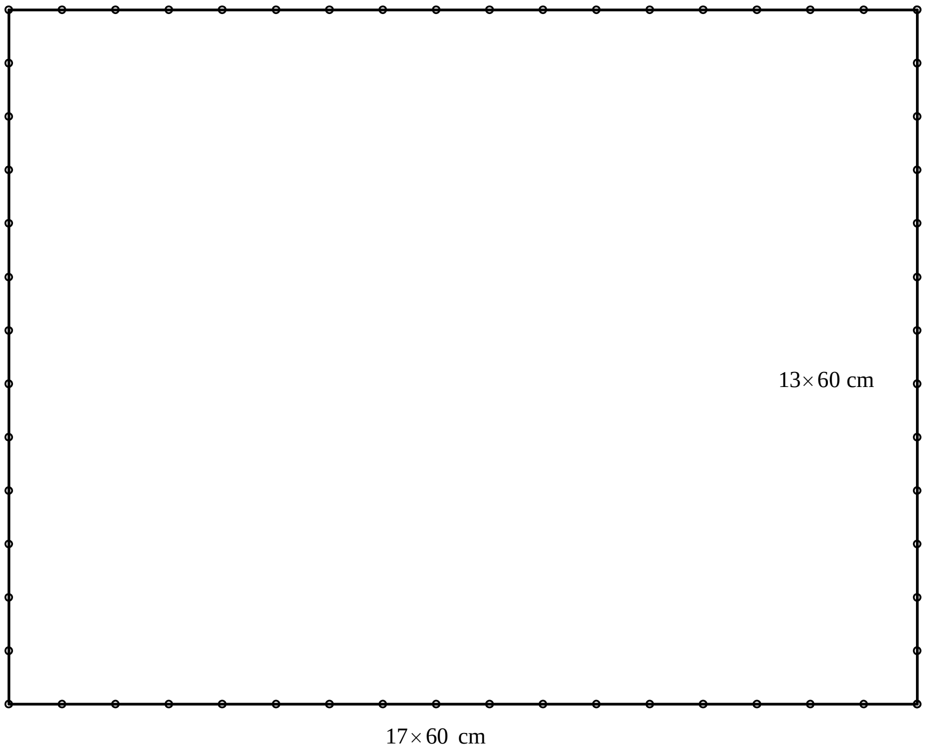
Pour avoir le nombre de plants minimum, il faut chercher l'espacement maximum.

On cherche donc le PGCD de 1020 et de 780.

À l'aide de la calculatrice, on obtient 60.

Le jardinier peut donc espacer au maximum de 60 cm.

On calcule ensuite $\dfrac{1020}{60}=17$ et $\dfrac{780}{60}=13$.



Il y a 17 écarts de 60 cm horizontalement et 13 écarts de 60 cm verticalement.

Le jardinier devra planter $17 \times 2 + 13 \times 2 = 34 + 26 = 60$ plants.

Il faut bien faire attention à la différence entre écart et plant.

IV.

Soit p un entier relatif fixé. On considère l'équation $3x + 4y = p$ (E) d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots)$ ………… ».

On commence par déterminer un couple solution particulière de (E).
On peut par exemple donner le couple $(-p ; p)$ dont la vérification est immédiate.

On peut ensuite répondre de deux manières :

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(-p - 4k ; p + 3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(-p + 4k ; p - 3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

V.

Quel est le plus petit entier naturel strictement supérieur à 1 tel que le reste de la division euclidienne de cet entier par 2, par 3, par 4, par 5, par 6, par 7, par 8 et par 9 soit 1 ? Expliquer la démarche en détail.

Soit n un entier naturel tel que le reste de la division euclidienne de n par 2, par 3, par 4, par 5, par 6, par 7, par 8 et par 9 soit 1.

$n - 1$ est donc divisible par 2, par 3, par 4, par 5, par 6, par 7, par 8, par 9.

Il est donc divisible par le PPCM de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Par des regroupements par deux, en observant que l'on a des multiples, on se ramène au PPCM de 5, 7, 8, 9 qui est égal à 2520 (c'est le produit car 5, 7, 8, 9 sont premiers deux à deux).

En fait, pour répondre proprement il faudrait raisonner par équivalence.

n est donc de la forme $2520k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Pour que n soit le plus petit possible strictement supérieur à 1, il faut choisir $k = 1$.

Le plus petit entier naturel cherché est donc 2521.

On peut aussi réaliser un programme sur calculatrice comme suit :

```
X prend la valeur 2
Tantque
reste(X,2)×reste(X,3)×reste(X,4)×reste(X,5)×reste(X,6)×reste(X,7)×reste(X,8)×reste(X,9)≠1 Faire
    X prend la valeur X+1
FinTantque
Afficher X
```

VI.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2 + n$.
Déterminer $\mathrm{PGCD}(u_n ; u_{n+1})$ suivant les valeurs de n.
Indication : Factoriser u_n.

$u_n = n(n+1)$ $\qquad$ $u_{n+1} = (n+1)(n+2)$

On a donc :

$$\mathrm{PGCD}(u_n ; u_{n+1}) = \mathrm{PGCD}(n(n+1) ; (n+1)(n+2))$$

$$= (n+1)\mathrm{PGCD}(n ; n+2)$$

D'après le lemme d'Euclide, $\mathrm{PGCD}(n ; n+2) = \mathrm{PGCD}(n ; 2)$.

Ainsi,

- si n est pair, alors $\text{PGCD}(n\,;n+2)=2$ et $\text{PGCD}(u_n\,;u_{n+1})=2(n+1)$;
- si n est impair, alors $\text{PGCD}(n\,;n+2)=1$ et $\text{PGCD}(u_n\,;u_{n+1})=n+1$.