TS spé

Devoir pour le mercredi 13 mars 2018

I. Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$ et $b = 2n^2 + n$.

1°) À l'aide de la calculatrice conjecturer l'expression du PGCD de a et de b en fonction de n.

2°) Démontrer cette conjecture.

II. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $a = \overline{12\underbrace{00...0}_{n \text{ zéros}}}$ et $b = \overline{21\underbrace{00...0}_{n \text{ zéros}}}$.

Déterminer l'expression du PGCD de a et de b en fonction de n.

Corrigé du DM pour le 13-3-2018

I.

1°)

On rentre la fonction $Y1 = \text{pgcd}\left(2X^3 + 5X^2 + 4X + 1, 2X^2 + X\right)$.

Grâce à la calculatrice, on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{PGCD}(a\,;b) = 2n+1$.

2°) Pour démontrer la conjecture émise au 1°), on procède par factorisation de *a* et *b*.

1ère méthode :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$$

$$= (2n+1)\left(n^2 + 2n + 1\right)$$

On peut aussi écrire $(n+1)^2$ à la place de $n^2 + 2n + 1$ mais cela n'est d'aucune utilité pour la suite.

$$b = 2n^2 + n$$

$$= n(2n+1)$$

$$\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}\left((2n+1)\left(n^2 + 2n + 1\right); n(2n+1)\right)$$

$$\text{PGCD}(a\,;b) = (2n+1)\,\text{PGCD}\left(n^2 + 2n + 1\,; n\right)$$

Or $\left(n^2 + 2n + 1\right) - n(n+2) = 1$ ce qui s'écrit aussi $1 \times \left(n^2 + 2n + 1\right) - n(n+2) = 1$.

On a une combinaison linéaire de $n^2 + 2n + 1$ et *n* à coefficient entiers relatifs égal à 1 donc $n^2 + 2n + 1$ et *n* sont premiers entre eux.

On a donc $\text{PGCD}(a\,;b) = (2n+1) \times 1$ ce qui donne immédiatement $\text{PGCD}(a\,;b) = 2n+1$.

La conjecture émise au 1°) est bien démontrée.

2e méthode :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$$

$$= (2n+1)(n^2 + 2n + 1)$$

$$= (2n+1)(n+1)^2$$

$$b = 2n^2 + n$$

$$= n(2n+1)$$

$$\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}\left((2n+1)(n+1)^2\,;\,n(2n+1)\right)$$

$$\text{PGCD}(a\,;b) = (2n+1)\,\text{PGCD}\left((n+1)^2\,;\,n\right)$$

Or n et $n+1$ sont premiers entre eux (car ce sont deux entiers premiers entre eux) donc n et $(n+1)^2$ (propriété du cours : « Si deux entiers sont premiers entre eux, alors leurs puissances à des exposants entiers naturels quelconques sont également des nombres premiers entre eux »).

On a donc $\text{PGCD}(a\,;b) = (2n+1)\times 1$ ce qui donne immédiatement $\text{PGCD}(a\,;b) = 2n+1$.

La conjecture émise au 1°) est bien démontrée.

II.

On commence par écrire $a = 12\times 10^n$ et $b = 21\times 10^n$.

On a donc $\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}(12\times 10^n\,;\,21\times 10^n)$ d'où $\text{PGCD}(a\,;b) = 10^n \times \text{PGCD}(12\,;21)$.

Or $\text{PGCD}(12\,;21) = 3$.

Donc $\text{PGCD}(a\,;b) = 3\times 10^n$.

Une façon pour prouver que $\text{PGCD}(12\,;21) = 3$ consiste à écrire

$\text{PGCD}(12\,;21) = \text{PGCD}(3\times 4\,;3\times 7) = 3\times \text{PGCD}(4\,;7) = 3\times 1$ (car 4 et 7 sont premiers entre eux).