Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Le barème est donné sur 20.

Prénom : …………………………………..… **Nom :** ………………………………………………

I. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points)

Cet exercice porte sur l'étude d'un code correcteur, appelé code Hamming(7,4), du nom du mathématicien américain Richard Hamming, né en 1915 à Chicago (Illinois) et mort en 1998 à Montery (Californie). Le principe est expliqué plus bas.

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.
Le mot « bit » est la contraction des mots anglais ***bi**nary digi**t***, qui signifient « chiffre binaire », avec un jeu de mot sur bit, « petit morceau ».

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4. Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une clé de contrôle $c_1c_2c_3$ formée de 3 bits qui sont calculés de la manière suivante :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On notera que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1°) Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

………

………

………

………

………

………

………

2°) Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Cocher les réponses correctes.

Si l'on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

- la valeur de c_1 est ☐ inchangée ☐ modifiée
- la valeur de c_2 est ☐ inchangée ☐ modifiée
- la valeur de c_3 est ☐ inchangée ☐ modifiée

3°) On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle et on compare avec les bits de contrôle reçus.
Compléter sans justifier le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé et J que ces deux bits sont égaux.

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	aucun
c_1	J							
c_2	F							
c_3	F							

4°) Justifier rapidement, en s'appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

………

………

………

5°) Voici deux messages de 7 bits : $\text{A} = 0100010$ et $\text{B} = 1101001$. On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur. Dire s'ils comportent une erreur et la corriger le cas échéant.

………

………

………

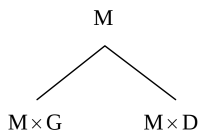
………

………

II. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) a) 2 points ; b) 1 point ; c) 2 points ; 4°) a) 1 point ; b) bonus)

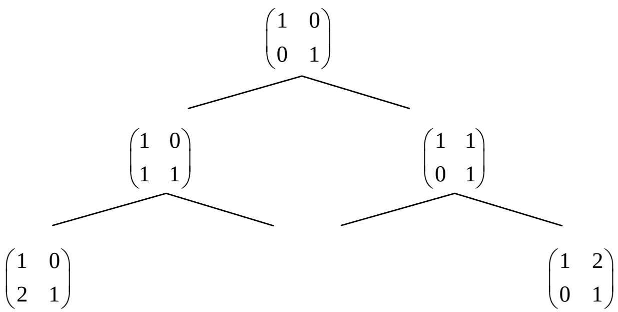
L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée. Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées d'ordre 2. On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices M × G (à gauche) et M × D (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer les deux matrices manquantes dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers naturels vérifiant $b + d \neq 0$.

2°) On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$.

Déterminer la fraction à laquelle aboutit, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre.

……

……

……

……

3°) a) Soit $A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

Justifier que le déterminant des matrices $A \times G$ et $A \times D$ est égal au déterminant de A.

……

……

……

……

b) Que vaut le déterminant de toutes les matrices de l'arbre de Stern-Brocot ? Répondre sans justifier par une phrase.

……

c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre de Stern-Brocot.

Démontrer que la fraction associée à M est irréductible.

Indication : On observera que le déterminant de M peut aussi s'écrire $d(a+c) - c(b+d)$.

……

……

……

……

……

4°) On considère l'algorithme donné sur la page à part. On précise que les valeurs des variables m et n saisies en entrée doivent être des entiers naturels non nuls premiers entre eux.

a) Faire fonctionner « à la main » l'algorithme avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$ saisies en entrée.

On complètera le tableau donné sur la page à part. Indiquer ce qu'affiche l'algorithme sur la ligne ci-dessous.

……

b) (bonus sur 1 point) Conjecturer le rôle de cet algorithme. Répondre par une phrase sans justifier.

……

II.

5°) Algorithme

> **Entrée :**
> Saisir m et n
>
> **Traitement :**
> **Tantque** $m \neq n$ **Faire**
>   **Si** $m < n$
>   Alors Afficher « Gauche »
> n prend la valeur $n - m$
>   **Sinon** Afficher « Droite »
> m prend la valeur $m - n$
>   **FinSi**
> **FinTantque**

5°) a) Tableau d'évolutions des variables

Affichage		Gauche			
m	4				
n	7				

Corrigé du contrôle du 15-2-2018

I.

Cet exercice porte sur l'étude d'un code correcteur, appelé code Hamming(7,4), du nom du mathématicien américain Richard Hamming, né en 1915 à Chicago (Illinois) et mort en 1998 à Montery (Californie). Le principe est expliqué plus bas.

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.
Le mot « bit » est la contraction des mots anglais ***bi**nary digi**t***, qui signifient « chiffre binaire », avec un jeu de mot sur bit, « petit morceau ».

On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4. Par exemple, pour le mot « 1101 », on a $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$.
On ajoute à cette liste une clé de contrôle $c_1c_2c_3$ formée de 3 bits qui sont calculés de la manière suivante :

- c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_3 + b_4$ par 2 ;
- c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1 + b_2 + b_4$ par 2.

On notera que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1°) Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

On a : $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$.

- On a : $b_2 + b_3 + b_4 = 1$.

Le reste de la division euclidienne de 1 par 2 est 1 donc $c_1 = 1$.

- On a : $b_1 + b_3 + b_4 = 2$.

Le reste de la division euclidienne de 2 par 2 est 0 donc $c_2 = 0$.

- On a : $b_1 + b_2 + b_4 = 2$.

Le reste de la division euclidienne de 2 par 2 est 0 donc $c_3 = 0$.

La clé de contrôle associée au mot 1001 est donc 100.

Autre méthode : On peut raisonner modulo 2.

2°) Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Cocher les réponses correctes.

Si l'on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :

• la valeur de c_1 est	☒ inchangée	☐ modifiée
• la valeur de c_2 est	☐ inchangée	☒ modifiée
• la valeur de c_3 est	☐ inchangée	☒ modifiée

Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Si on change la valeur de b_1 en b_1', on aura $b_1' \equiv b_1 + 1$ (mod. 2).
- la valeur de c_1 ne dépend pas de b_1 donc est inchangée ;
- $b_1' + b_3 + b_4 \equiv b_1 + b_3 + b_4 + 1$ (mod. 2) donc c_2 est modifiée ;
- $b_1' + b_2 + b_4 \equiv b_1 + b_2 + b_4 + 1$ (mod. 2) donc c_3 est modifiée.

3°) On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée. À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle et on compare avec les bits de contrôle reçus.
Compléter sans justifier le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé et J que ces deux bits sont égaux.

Bit de contrôle calculé \ Bit erroné	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	aucun
c_1	J	F	F	F	F	J	J	J
c_2	F	J	F	F	J	F	J	J
c_3	F	F	J	F	J	J	F	J

4°) Justifier rapidement, en s'appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous les cas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

Les huit triplets du tableau $(\text{J} ; \text{F} ; \text{F})$, $(\text{F} ; \text{J} ; \text{F})$, ..., $(\text{J} ; \text{J} ; \text{J})$ sont tous différents. Quand on reçoit un message, on calcule les codes de contrôle et on les compare avec ceux qu'on a reçus. Selon le triplet obtenu, on sait donc quel est le bit erroné, s'il y en a un.

5°) Voici deux messages de 7 bits : $\text{A} = 0100010$ et $\text{B} = 1101001$. On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur. Dire s'ils comportent une erreur et la corriger le cas échéant.

• Pour le message $A = 0100010$:

$b_2 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 0 = 1$ a pour reste 1 dans la division euclidienne par 2.
$b_1 + b_3 + b_4 = 0 + 0 + 0 = 0$ a pour reste 0 dans la division euclidienne par 2.
$b_1 + b_2 + b_4 = 0 + 1 + 0 = 1$ a pour reste 1 dans la division euclidienne par 2.
Donc le code correct est 101 alors que le code reçu est 010 ; la différence entre les deux codes correspond au triplet $(\mathrm{F}\,;\mathrm{F}\,;\mathrm{F})$. D'après le tableau, c'est donc b_4 qui est erroné et le bon message est 0101010.

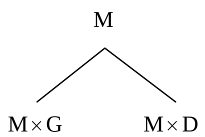
• Pour le message $B = 1101001$:

$b_2 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ a pour reste 0 dans la division euclidienne par 2.
$b_1 + b_3 + b_4 = 1 + 0 + 1 = 2$ a pour reste 0 dans la division euclidienne par 2.
$b_1 + b_2 + b_4 = 1 + 1 + 2 = 3$ a pour reste 1 dans la division euclidienne par 2.
Donc le code correct est 001 et est identique au code reçu ; le message B ne contient pas d'erreur.

II.

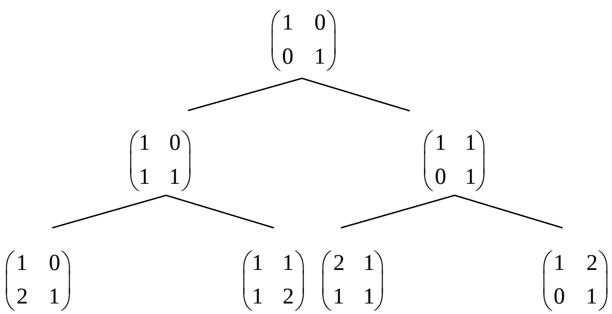
L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée. Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées d'ordre 2. On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices M × G (à gauche) et M × D (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Déterminer les deux matrices manquantes dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



On pouvait effectuer les calculs à la main et les vérifier grâce à la calculatrice.

Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers naturels vérifiant $b + d \neq 0$.

2°) On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$.
Déterminer la fraction à laquelle aboutit, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre.

Le trajet « gauche-droite-gauche » aboutit à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

La fraction associée est donc $\dfrac{2+1}{3+2}$ soit $\dfrac{3}{5}$.

3°) a) Soit $A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.
Justifier que le déterminant des matrices $A \times G$ et $A \times D$ est égal au déterminant de A.

Par définition, $\det A = xt - yz$.

On a $A \times G = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & z \\ y+t & t \end{pmatrix}$

$\det(A \times G) = (x+z)t - z(y+t) = xt \cancel{+zt} - zy \cancel{-zt} = xt - yz$

On constate que $\det(A \times G) = \det A$.

On a $A \times D = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+z \\ y & y+t \end{pmatrix}$

$\det(A \times D) = x(y+t) - y(x+z) = \cancel{xy} + xt \cancel{-yx} - yz = xt - yz$

On constate que $\det(A \times D) = \det A$.

Il s'agit d'un cas particulier d'un résultat plus général qui sera démontré dans l'enseignement supérieur : « Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants ».

b) Que vaut le déterminant de toutes les matrices de l'arbre de Stern-Brocot ? Répondre sans justifier par une phrase.

D'après la question précédente, la multiplication à droite d'une matrice carrée d'ordre 2 par les matrices G et D ne change pas le déterminant donc le déterminant de toutes les matrices de l'arbre de Stern-Brocot est égal au déterminant de la matrice initiale c'est-à-dire 1.

c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre de Stern-Brocot.

Démontrer que la fraction associée à M est irréductible.
Indication : On observera que le déterminant de M peut aussi s'écrire $d(a+c)-c(b+d)$.

Il s'agit de démontrer que la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible c'est-à-dire que $a+c$ et $b+d$ sont premiers entre eux.

On a : $d(a+c)-c(b+d) = da\cancel{+dc} - cb\cancel{-cd} = ad - bc = \det \mathrm{M}$.

Or d'après la question précédente, toutes les matrices de l'arbre de Stern-Brocot ont un déterminant égal à 1 d'où $\det \mathrm{A} = 1$.

Par conséquent, on peut écrire, $d(a+c)-c(b+d)=1 \quad (1)$.

Comme d et $-c$ sont des entiers relatifs, l'égalité (1) s'interprète comme une combinaison linéaire de $a+c$ et de $b+d$ à coefficients entiers relatifs égale à 1.

On peut donc dire que $a+c$ et $b+d$ sont premiers entre eux.

Par suite, la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

4°) On considère l'algorithme donné sur la page à part. On précise que les valeurs des variables m et n saisies en entrée doivent être des entiers naturels non nuls premiers entre eux.
a) Faire fonctionner « à la main » l'algorithme avec les valeurs $m=4$ et $n=7$ saisies en entrée.
On complètera le tableau donné sur la page à part. Indiquer ce qu'affiche l'algorithme sur la ligne ci-dessous.

Gauche, Droite, Gauche, Gauche

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

On peut réaliser le programme sur la calculatrice.

b) (bonus sur 1 point) Conjecturer le rôle de cet algorithme. Répondre par une phrase sans justifier.

On peut émettre la conjecture suivante : « L'algorithme fournit le chemin à suivre à partir de la matrice initiale pour obtenir une fraction $\dfrac{m}{n}$ donnée ».

On peut le vérifier sur des exemples.