$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 5 février 2018 (3 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

- Le barème est donné sur 40.
- Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors des réponses attendues.

I. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point + 2 points ; 4°) 2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=ax+b-\dfrac{1}{x-3}$ où a et b sont des réels fixés.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

On répondra directement en écrivant : « $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\quad f'(x)=$........... ».

2°) On précise maintenant et pour toute la suite de l'exercice que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{A}(2\,;1)$ et admet une tangente horizontale en ce point.
Déterminer les valeurs de a et b.

3°) Écrire $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient dont le numérateur est factorisé.

Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite L d'équation $y=3x+2$.

On attend une rédaction précise :

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite L sont les solutions de l'équation …… (1).

(1) est successivement équivalente à :

….

II. (7 points : 1°) 2 points + 3 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+x-2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\,;-2\}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

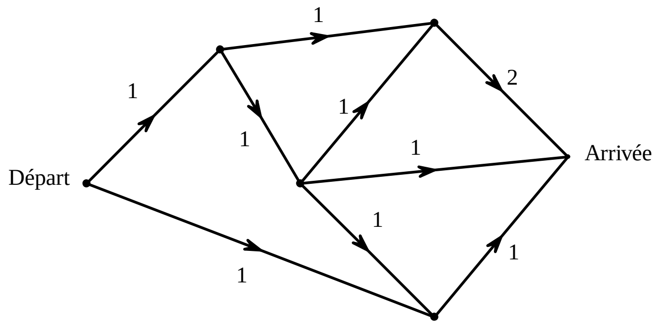
1°) Calculer $f'(x)$ puis faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

Compléter le tableau avec les extremums locaux.

2°) Déterminer en rédigeant correctement une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse – 1.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Pour se rendre chez son amie Jeanne, Sophie a le choix entre plusieurs chemins, tous les chemins ayant la même probabilité d'être empruntés. Le graphe suivant montre les différents itinéraires possibles en y indiquant le nombre de feux tricolores sur chaque portion.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux tricolores rencontrés sur les différents parcours.



1°) Recopier et compléter la phrase : « X peut prendre les valeurs : $x_1=$......, $x_2=$......, … ».
Donner la loi de probabilité de X dans un tableau. On écrira les probabilités sous forme fractionnaire.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On donnera les résultats sous forme décimale.

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 4 points)

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public.
Dans une urne, se trouve placées 7 boules noires et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard. Si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si la boule est blanche, le joueur remet la première boule tirée dans l'urne, prend une deuxième boule et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée rapporte au joueur 1 € et chaque boule blanche 2 €.
Pour un jeu, le joueur paye 2 €. On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique en euros du joueur (c'est-à-dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

Faire un arbre de probabilités au brouillon.
On écrira les probabilités sous forme décimale.

1°) Donner sans justifier la loi de probabilité de X dans un tableau.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On attend deux lignes de calculs dans chaque cas.
On donnera les résultats sous forme décimale.

3°) Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques. Après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne.
Faire au brouillon un arbre de probabilités modélisant la nouvelle situation.
Calculer la probabilité des événements U : « Le gain du joueur est nul » et V : « Le gain du joueur est strictement négatif ».

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel.
On précise que :
• les variables n et k sont des entiers naturels avec $n \geqslant 1$;
• la variable S est un réel.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour k variant de 0 à n **Faire**
   S prend la valeur $S+\sin\dfrac{k\pi}{n}$
FinPour

Sortie :
Afficher S

1°) Faire tourner « à la main » cet algorithme lorsque l'on saisit la valeur 4 pour n en entrée.
On remplira pour cela le tableau suivant présentant l'évolution des variables k et S.

k		0	1	2	3	4
S	0	……..	……..	……..	……..	……..

Quelle est la valeur de S affichée en sortie ?

…… (une seule réponse, sans faire de phrase sans égalité)

2°) On admet que, pour un entier naturel n quelconque non nul saisi en entrée, la valeur de S affichée en sortie est égale à $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$.

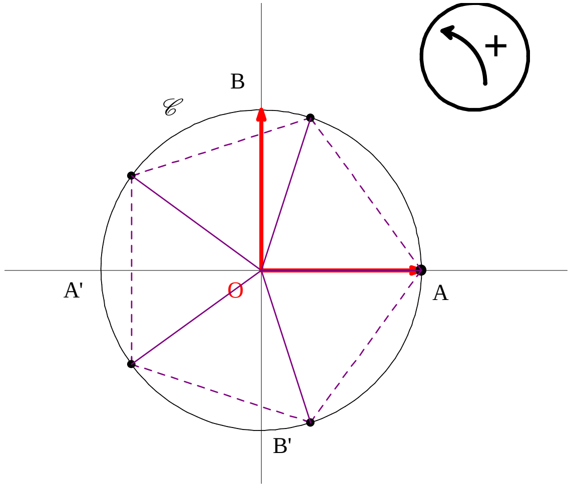
a) À l'aide du résultat de la question 1°), déterminer la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{8}$ sans radical au dénominateur.

b) Déterminer par une méthode analogue la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

c) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n tel que la valeur de S affichée en sortie soit supérieure ou égale à 50. On donnera la réponse sans justifier.

VI. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A'}(-1\,;0)$, $\text{B'}(0\,;-1)$.



1°) On considère le point M de $\mathscr{C}$ tel que $-\dfrac{53\pi}{5}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA'}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)$ et placer M sur le cercle trigonométrique.

2°) On considère le point N de $\mathscr{C}$ tel $\dfrac{87\pi}{10}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OB}}\,;\overrightarrow{\text{ON}}\right)$.
Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{ON}}\right)$ et placer N sur le cercle trigonométrique.

3°) Déterminer la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OM}}\,;\overrightarrow{\text{ON}}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[-2\pi\,;0]$.

VII. (4 points : 1 point par question)

Les quatre questions sont indépendantes.
Aucune justification n'est demandée pour la réponse de la question 1°). En revanche, on détaillera les calculs des autres questions ainsi que les explications nécessaires pour la réponse de la question 4°).

1°) Soit a et b deux réels quelconques de l'intervalle $[-\pi\,;0]$ tels que $a<b$.
Comparer cos a et cos b.

2°) Calculer $\cos(2017\pi+x)-\cos(2017\pi-x)$, x désignant un réel quelconque.

3°) Calculer $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, x désignant un réel quelconque.

4°) Déterminer la valeur exacte de $\cos a$ sachant que $\sin(\pi+a)=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $a\in\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Copie du contrôle du 5-2-2018

I. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point + 2 points ; 4°) 2 points)

1°) ………

2°) ………

………

………

………

………

………

………

3°) ………

4°) ………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (7 points : 1°) 2 points + 3 points ; 2°) 2 points)

1°) ………

………

………

2°) ………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) ………

………

2°) ………

………

………

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 4 points)

1°)

2°) ………

………

………

3°) ………

………

………

………

………

………

………

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point)

2°) a) ………

………

………

………

………

b) ………

………

………

………

………

c) …………… (une seule réponse sans justifier).

VI. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

1°) ………

………

………

………

2°) ………

………

………

………

3°) ………

………

………

………

………

………

………

VII. (4 points : 1 point par question)

1°) …………………………….. (une seule réponse)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 5-2-2018

I.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=ax+b-\dfrac{1}{x-3}$ où a et b sont des réels fixés.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a. On donnera le résultat sous la forme d'une somme.

On répondra directement en écrivant : « $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \quad f'(x)=$........... ».

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \qquad f'(x)=a+\frac{1}{(x-3)^2}$$

Le détail du calcul est donné par : On $f'(x)=a+0-\left(-\dfrac{1}{(x-3)^2}\right)$

2°) On précise maintenant et pour toute la suite de l'exercice que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $\text{A}(2\,;1)$ et admet une tangente horizontale en ce point.
Déterminer les valeurs de a et b.

Les deux informations se traduisent par $f(2)=1 \quad (1)$ et $f'(2)=0 \quad (2)$.

Compte tenu du calcul effectué au 1°), (2) donne $a+\dfrac{1}{(2-3)^2}=0$ d'où $a=-1$.

(2) donne alors $a\times2+b-\dfrac{1}{2-3}=1$ soit $2\times(-1)+b+1=1$ qui fournit immédiatement $b=2$.

Ainsi, f est définie par $f(x)=-x+2-\dfrac{1}{x-3}$.

3°) Écrire $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient dont le numérateur est factorisé.
Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \quad f'(x)=-1+\frac{1}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{-1\times(x-3)^2+1}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{1-(x-3)^2}{(x-3)^2} \qquad \text{(utilisation de l'identité remarquable } a^2-b^2\text{)}$$

$$=\frac{\left[1-(x-3)\right]\left[1+(x-3)\right]}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{(4-x)(x-2)}{(x-3)^2}$$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
Signe de $(4-x)(x-2)$		$-$	0^{num}	$+$		$+$	0^{num}	$-$	
Signe de $(x-3)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0^{num}	$+$	$\Vert$	$+$	0^{num}	$-$	
Variations de f		↘	1	↗	$\Vert$	↗	-3	↘	

On vérifie les variations de f à l'aide de la calculatrice.

À l'aide de la calculatrice, on obtient immédiatement les valeurs des extremums locaux :
$f(2)=1$ (minimum local) et $f(4)=-3$ (maximum local).
Il est intéressant de calculer les valeurs de ces extremums à la main, en guise d'entraînement aux calculs.

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite L d'équation $y=3x+2$.

On attend une rédaction précise :

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite L sont les solutions de l'équation …… (1).

(1) est successivement équivalente à :

….

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite L sont les solutions de l'équation $f\,'(x)=3 \;\; (1)$.

On résout alors l'équation (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$-1+\frac{1}{(x-3)^2}=3$$

$$\frac{1}{(x-3)^2}=4$$

$$(x-3)^2=\frac{1}{4}$$ /!\ On ne développe surtout pas le membre de gauche.

$$x-3=\frac{1}{2} \text{ ou } x-3=-\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{7}{2} \text{ ou } x=\frac{5}{2}$$

$\mathscr{C}$ admet donc une tangente parallèle à la droite L aux points d'abscisses $\frac{5}{2}$ et $\frac{7}{2}$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+x-2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\,;-2\}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f\,'(x)$ puis faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f\,'(x)$ et les variations de *f*. Compléter le tableau avec les extremums locaux.

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\,;-2\}$ comme fonction rationnelle (en effet, les fonctions du numérateur et du dénominateur sont des fonctions polynôme).

Pour calculer la dérivée, on utilise la formule de dérivation d'un quotient.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\,;-2\} \quad f\,'(x)=\frac{2x\times(x^2+x-2)-x^2\times(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x^2-4x-2x^3-x^2}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
SGN de x		–	|	–	0^{num}	+	|	+		+	
SGN de $(x-4)$		–	|	–	|	–	|	–	0^{num}	+	
SGN de $(x^2+x-2)^2$		+	$0^{\text{dén}}$	+	|	+	$0^{\text{dén}}$	+		+	
SGN de $f\,'(x)$		+	‖	+	0^{num}	–	‖	–	0^{num}	+	
Variations de *f*		↗	‖	↗	0	↘	‖	↘	$\frac{8}{9}$	↗	

On vérifie les variations grâce à la calculatrice graphique.

On calcule les extremums locaux.

2°) Déterminer en rédigeant correctement une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse – 1.

Une équation de T s'écrit $y=f\,'(-1)(x+1)+f(-1)$.

$$f(-1)=\frac{(-1)^2}{(-1)^2-1-2}=-\frac{1}{2}$$

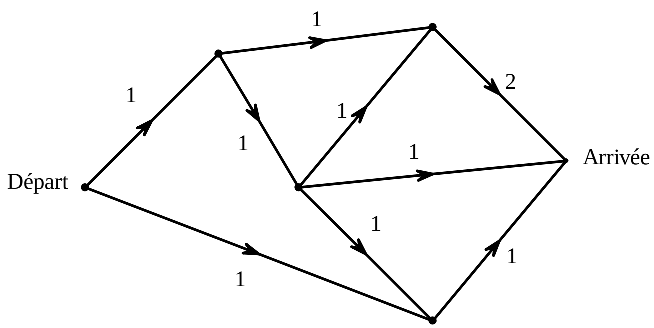
$$f\,'(-1)=\frac{(-1)^2-4\times(-1)}{(-1)^2-1-2}=\frac{5}{4}$$

T a donc pour équation $y=\frac{5}{4}(x+1)-\frac{1}{2}$ soit $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$.

On vérifie grâce à la calculatrice.

III.

Pour se rendre chez son amie Jeanne, Sophie a le choix entre plusieurs chemins, tous les chemins ayant la même probabilité d'être empruntés. Le graphe suivant montre les différents itinéraires possibles en y indiquant le nombre de feux tricolores sur chaque portion.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux tricolores rencontrés sur les différents parcours.



1°) Recopier et compléter la phrase : « X peut prendre les valeurs : $x_1 = ...$, $x_2 = ...$, … ».
Donner la loi de probabilité de X dans un tableau. On écrira les probabilités sous forme fractionnaire.

X peut prendre les valeurs $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$.

Il y a 5 parcours possibles.

x_i	2	3	4	5	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	Total $= 1$

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On donnera les résultats sous forme décimale.

$$\mathrm{E}(X) = 2\times\frac{1}{5} + 3\times\frac{1}{5} + 4\times\frac{2}{5} + 5\times\frac{1}{5}$$

$$= 3{,}6$$

Pour le calcul de la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens.

$$\mathrm{V}(X) = 2^2\times\frac{1}{5} + 3^2\times\frac{1}{5} + 4^2\times\frac{1}{5} + 5^2\times\frac{1}{5} - 3{,}6^2$$

$$= 1{,}04$$

IV.

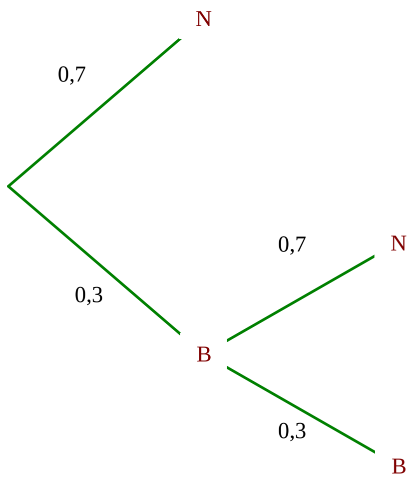
Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public.
Dans une urne, se trouve placées 7 boules noires et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
Le joueur prend une boule au hasard. Si cette boule est noire, le jeu s'arrête ; si la boule est blanche, le joueur remet la première boule tirée dans l'urne, prend une deuxième boule et le jeu s'arrête.
Une boule noire tirée rapporte au joueur 1 € et chaque boule blanche 2 €.
Pour un jeu, le joueur paye 2 €. On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique en euros du joueur (c'est-à-dire la différence entre la somme rapportée par les boules tirées et le prix du jeu).

Faire un arbre de probabilités au brouillon.
On écrira les probabilités sous forme décimale.

1°) Donner sans justifier la loi de probabilité de X dans un tableau.

On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

On note B l'événement « tirer une boule noire » et N l'événement « tirer une boule blanche ».



X peut prendre les valeurs $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

x_i	-1	1	2
$P(X = x_i)$	0,7	0,21	0,09

On utilise le principe multiplicatif qui découle de l'indépendance des épreuves.

$P(X=-1)=P(N)$

$=0,7$

$P(X=1)=P(B-N)$

$=P(B)\times P(N)$

$=0,3\times 0,7$

$=0,21$

$P(X=2)=P(B-B)$

$=P(B)\times P(B)$

$=0,3\times 0,3$

$=0,09$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

$P(X=-1)+P(X=1)+P(X=2)=1$

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. On attend deux lignes de calculs dans chaque cas.
On donnera les résultats sous forme décimale.

$E(X)=(-1)\times 0,7+1\times 0,21+2\times 0,09$

$=-0,31$

Pour le calcul de la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens.

$V(X)=(-1)^2\times 0,7+1^2\times 0,21+2^2\times 0,09-(-0,31)^2$

$=1,1739$

3°) Un joueur fait trois jeux. Ceux-ci se déroulent dans des conditions identiques ; après chaque jeu, les boules tirées sont remises dans l'urne.
Calculer la probabilité des événements U : « Le gain du joueur est nul » et V : « Le gain du joueur est strictement négatif ».
On donnera les valeurs exactes des résultats sous forme décimale.
Aucun détail des calculs n'est attendu.

On peut éventuellement faire un arbre de probabilités avec les différentes valeurs de X (1, – 1 et 2).

L'événement U est réalisé lorsque le joueur perd deux fois 1 euro et gagne une fois 2 euros.

On utilise l'indépendance des épreuves.

$P(U)=P(X=-1)\times P(X=-1)\times P(X=2)+P(X=-1)\times P(X=2)\times P(X=-1)+P(X=2)\times P(X=-1)\times P(X=-1)$

$=3\times 0,7^2\times 0,09$

$=0,1323$

$P(V)=P(X=-1)\times P(X=-1)\times P(X=-1)+P(X=-1)\times P(X=1)\times P(X=-1)+P(X=1)\times P(X=-1)\times P(X=-1)$
$+P(X=-1)\times P(X=1)\times P(X=-1)$

$=0,7^3+3\times 0,7^2\times 0,21$

$=0,6517$

V.

On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel.
On précise que :
• les variables n et k sont des entiers naturels avec $n\geqslant 1$;
• la variable S est un réel.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour k variant de 0 à n **Faire**
  S prend la valeur $S+\sin\frac{k\pi}{n}$
FinPour

Sortie :
Afficher S

1°) Faire tourner « à la main » cet algorithme lorsque l'on saisit la valeur 4 pour n en entrée.
On remplira pour cela le tableau suivant présentant l'évolution des variables k et S.

k		0	1	2	3	4
S	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$

Quelle est la valeur de S affichée en sortie ?

$1+\sqrt{2}$ (une seule réponse, sans faire de phrase sans égalité)

2°) On admet que, pour un entier naturel n quelconque non nul saisi en entrée, la valeur de S affichée en sortie est égale à $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

a) À l'aide du résultat de la question 1°), déterminer la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$ sans radical au dénominateur.

On rappelle que la tangente d'un réel x dont le cosinus est non nul est donnée par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

D'après l'énoncé, la valeur affichée en sortie pour $n = 4$ est égale à $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2\times 4}}{\sin\frac{\pi}{2\times 4}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}$.

On a donc $\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}+1$.

En inversant les deux membres, on obtient $\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ soit $\tan\frac{\pi}{8} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1\times\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt{2}-1$$

b) Déterminer par une méthode analogue la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$.

On a : $\tan\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2\times 6}}{\cos\frac{\pi}{2\times 6}}$.

En faisant tourner l'algorithme pour $n = 6$, on obtient $2+\sqrt{3}$.

Donc $\tan\frac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{1\times\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 2-\sqrt{3}$.

La calculatrice TI-Premium CE fournit les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Avec ces deux valeurs, on retrouve aisément la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$.

c) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n tel que la valeur de S affichée en sortie soit supérieure ou égale à 50. On donnera la réponse sans justifier.

79

On cherche le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $\tan\frac{\pi}{2n} \geqslant 50$.

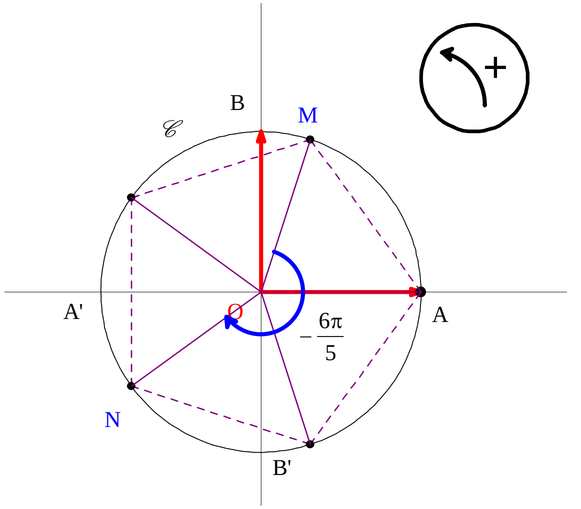
On utilise la calculatrice comme indiqué dans la question.

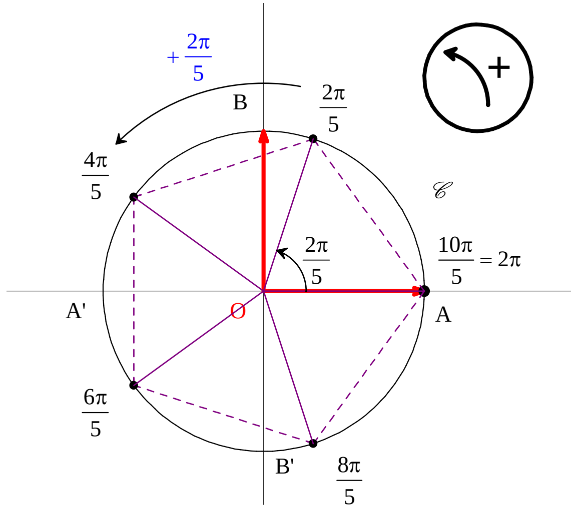
On rentre la fonction $f : x \mapsto \tan\frac{\pi}{2x}$ de manière à obtenir une table de valeurs qui débute à 1 avec un pas de 1.

On cherche le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $f(n) \geqslant 50$.

VI.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$.





Lorsque le cercle trigonométrique est divisé en 5, chaque angle au centre (géométrique) mesure $\frac{2\pi}{5}$ radians.

Pour placer les points, on ajoute $\frac{2\pi}{5}$ à la mesure de l'angle précédent.

1°) On considère le point M de $\mathscr{C}$ tel que $-\frac{53\pi}{5}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA'} ; \overrightarrow{OM}\right)$.

Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)$ et placer M sur le cercle trigonométrique.

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OA'}\right)+\left(\overrightarrow{OA'} ; \overrightarrow{OM}\right)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)=\pi-\frac{53\pi}{5}$

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)=-\frac{48\pi}{5}$

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)=\frac{2\pi}{5}-10\pi$ [ou encore $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)=\frac{2\pi}{5}-2\times5\pi$]

$\frac{2\pi}{5}\in\left]-\pi ; \pi\right]$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)$ est $\frac{2\pi}{5}$.

Autre méthode :

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)=\left(-\overrightarrow{OA'} ; \overrightarrow{OM}\right)$

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)=\left(\overrightarrow{OA'} ; \overrightarrow{OM}\right)+\pi$

On achève ensuite comme précédemment.

2°) On considère le point N de $\mathscr{C}$ tel $\frac{87\pi}{10}$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{ON}\right)$.

Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)$ et placer N sur le cercle trigonométrique.

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{ON}\right)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)=\frac{87\pi}{10}+\frac{\pi}{2}$

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)=\frac{46\pi}{5}$

$\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)=-\frac{4\pi}{5}+10\pi$ [ou encore $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)=-\frac{4\pi}{5}+2\times5\pi$]

$-\frac{4\pi}{5}\in\left]-\pi ; \pi\right]$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)$ est $-\frac{4\pi}{5}$.

On peut ainsi placer aisément N sur le cercle trigonométrique.

3°) Déterminer la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)$ qui appartient à l'intervalle $\left[-2\pi ; 0\right]$.

On reprend les résultats des deux questions précédentes.

$\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}\right)-\left(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM}\right)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)=-\frac{2\pi}{5}-\frac{4\pi}{5}$

$\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)=-\frac{6\pi}{5}$

$-\frac{6\pi}{5}\in\left[-2\pi ; 0\right]$ donc la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right)$ qui appartient à l'intervalle $\left[-2\pi ; 0\right]$ est $-\frac{6\pi}{5}$.

On vérifie le résultat graphiquement.

VII.

Les quatre questions sont indépendantes.
Aucune justification n'est demandée pour la réponse de la question 1°). En revanche, on détaillera les calculs des autres questions ainsi que les explications nécessaires pour la réponse de la question 4°).

1°) Soit a et b deux réels quelconques de l'intervalle $\left[-\pi ; 0\right]$ tels que $a<b$.
Comparer cos a et cos b.

On a $\cos a<\cos b$. Ce résultat découle d'une observation graphique sur le cercle trigonométrique.

2°) Calculer $\cos(2017\pi + x) - \cos(2017\pi - x)$, x désignant un réel quelconque.

$$\begin{aligned}
\cos(2017\pi + x) - \cos(2017\pi - x) &= \cos(2016\pi + \pi + x) - \cos(2016\pi + \pi - x)\\
&= \cos(\pi + x) - \cos(\pi - x)\\
&= -\cos x - (-\cos x)\\
&= \cancel{-\cos x}\ \cancel{+\cos x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

3°) Calculer $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, x désignant un réel quelconque.

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2\\
&= (\cos x)^2 + (\sin x)^2\\
&= 1 \qquad \text{(relation fondamentale)}
\end{aligned}$$

4°) Déterminer la valeur exacte de $\cos a$ sachant que $\sin(\pi + a) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $a \in \left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On sait que $\sin(\pi + a) = -\sin a$ donc $\sin a = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ soit $\cos^2 a + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1$ ce qui donne immédiatement $\cos^2 a = \dfrac{9}{10}$.

On en déduit que $\cos a = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ou $\cos a = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Or $a \in \left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos a \leqslant 0$.

Finalement, on peut écrire $\cos a = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.