ffTS spécialité

Contrôle du lundi 29 janvier 2018 (1 heure)

Prénom : …………… **Nom : …………………………………………**

Note : …. / 20

I. (2 points)

Écrire la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels compris entre 1 et 3 au sens large, le coefficient situé sur la ligne i et dans la colonne j, noté $a_{i,\ j}$, est défini par $a_{i,\ j} = i$ si $i = j$, $a_{i,\ j} = 0$ si $i < j$, $a_{i,\ j} = -1$ si $i > j$.

II. (2 points)

On pose $\text{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\text{B} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice M, carrée d'ordre 2, telle que $3\text{M} - 2\text{A} = \text{M} + \text{B}$.
On donnera directement la matrice M en détaillant les calculs.

III. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

On pose $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\text{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque.

1°) Calculer la matrice $\text{C} = \text{AB}$. On donnera le résultat directement.

Déterminer a tel que la somme des coefficients de C soit nulle.

2°) Dans cette question, a est un réel quelconque.
Calculer B^2 et B^3. On donnera les résultats sans explication.
Conjecturer une formule pour B^n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On formulera cette conjecture sous la forme : « On peut conjecturer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a $\text{B}^n = ...$ ».

IV. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.

1°) Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice A n'est pas inversible.

2°) Dans cette question, on prend $a = 1 + \mathrm{i}$.
Déterminer A^{-1} dans ce cas.

3°) Dans cette question, on prend $a = 0$.
Conjecturer une formule pour A^n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On formulera cette conjecture sous la forme : « On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = ...$ ».

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$ où α et β sont deux réels fixés.

.

1°) Déterminer α et β tels que la matrice $C = AB$ soit diagonale.

2°) On suppose que α et β ont les valeurs trouvées précédemment.
Calculer C^n, n étant un entier naturel quelconque.

Corrigé du contrôle du 29-1-2018

I.

Écrire la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels compris entre 1 et 3 au sens large, le coefficient situé sur la ligne *i* et dans la colonne *j*, noté $a_{i,\,j}$, est défini par $a_{i,\,j}=i$ si $i=j$, $a_{i,\,j}=0$ si $i<j$, $a_{i,\,j}=-1$ si $i>j$.

D'après l'énoncé, $a_{1,1}=1$, $a_{2,2}=2$, $a_{3,3}=3$, $a_{1,2}=0$ etc.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

II.

On pose $A=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}8 & 9\\ -4 & -6\end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice M, carrée d'ordre 2, telle que $3M-2A=M+B$.
On donnera directement la matrice M en détaillant les calculs.

On cherche la matrice M, carrée d'ordre 2, telle que $3M-2A=M+B$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 2M=2A+B$

$\Leftrightarrow M=\dfrac{1}{2}(2A+B)$

$\Leftrightarrow M=A+\dfrac{1}{2}B$

$\Leftrightarrow M=\begin{pmatrix}3 & \dfrac{23}{2}\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

III.

On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -a\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque.

1°) Calculer la matrice $C=AB$. On donnera le résultat directement.

Déterminer a tel que la somme des coefficients de C soit nulle.

$C=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$

La somme des coefficients de C est égale à $10+a$.

Pour que cette somme soit nulle, il faut et il suffit que $a=-10$.

2°) Dans cette question, a est un réel quelconque.
Calculer B^2 et B^3. On donnera les résultats sans explication.
Conjecturer une formule pour B^n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On formulera cette conjecture sous la forme : « On peut conjecturer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a $B^n=......$ ».

$B^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a^2 & 0\\ 0 & a & 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $B^3=\begin{pmatrix}1 & 1+a & 1\\ 0 & a^3 & 0\\ 0 & a^2 & 0\end{pmatrix}$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a $B^n=\begin{pmatrix}1 & 1+a+a^2+...+a^{n-2} & 1\\ 0 & a^n & 0\\ 0 & a^{n-1} & 0\end{pmatrix}$.

- Il faut calculer B^4 et B^5 pour avoir une idée précise de la conjecture.
- La somme $1+a+a^2+...+a^{n-2}$ peut aussi s'écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-2}a^k$.
- Pour $a\neq 1$, cette somme peut se réduire en $\dfrac{a^{n-1}-1}{a-1}$ ou en $\dfrac{1-a^{n-1}}{1-a}$.

IV.

On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & a^2\end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.

1°) Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice A n'est pas inversible.

$\det A = 1\times a^2 - a\times 2 = a^2-2a$

A n'est pas inversible $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2-2a=0$

$\Leftrightarrow$ $a(a-2)=0$

$\Leftrightarrow$ $a=0$ ou $a=2$

2°) Dans cette question, on prend $a=1+\mathrm{i}$.
Déterminer A^{-1} dans ce cas.

Pour $a=1+\mathrm{i}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i}\end{vmatrix}=1\times 2\mathrm{i}-2(1+\mathrm{i})=-2$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & -2\\ -(1+\mathrm{i}) & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1\\ \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

3°) Dans cette question, on prend $a=0$.
Conjecturer une formule pour A^n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On formulera cette conjecture sous la forme : « On peut conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad A^n=......$ ».

Pour $a=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

On peut conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad A^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

V.

On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ \alpha & -2\end{pmatrix}$ où α et β sont deux réels fixés.

1°) Déterminer α et β tels que la matrice $C=AB$ soit diagonale.

$C=\begin{pmatrix}1+2\alpha & \beta-4\\ \alpha-1 & -\beta-2\end{pmatrix}$

C est diagonale $\Leftrightarrow$ $\alpha-1=0$ et $\beta-4=0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha=1$ et $\beta=4$

2°) On suppose que α et β ont les valeurs trouvées précédemment.
Calculer C^n, n étant un entier naturel quelconque.

Pour $\alpha=1$ et $\beta=4$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$.

Par la propriété sur les puissances d'une matrice diagonale, on a $\forall n\in\mathbb{N}\quad C^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-6)^n\end{pmatrix}$.