TS1

Devoir pour le lundi 22 janvier 2018

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

I. Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe $\mathrm{j} = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{1}{\mathrm{j}}$.

1°) Calculer $\left| \mathrm{j} \right|$.

2°) Démontrer que B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

3°) Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P*, d'affixe *z*, tels que $\left| \mathrm{j}z - 1 \right| = 1$.
On attend une rédaction très soignée.

II. Soit *m* un réel fixé tel que $0 < m < 1$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)^{2} = m \quad \left(\mathrm{E}_{m}\right)$.

Corrigé

I. Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A le point d'affixe $\text{j} = \dfrac{\text{i}\sqrt{3}-1}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{1}{\text{j}}$.

1°) Calculer $|\,\text{j}\,|$.

$$|\,\text{j}\,| = \left|\frac{\text{i}\sqrt{3}-1}{2}\right|$$

$$= \frac{\left|\text{i}\sqrt{3}-1\right|}{|\,2\,|}$$

$$= \frac{\sqrt{3+1}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$= 1$$

2°) Démontrer que B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$\frac{1}{\text{j}} = \frac{2}{\text{i}\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{2\left(-\text{i}\sqrt{3}-1\right)}{\left(\text{i}\sqrt{3}-1\right)\left(-\text{i}\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{2\left(-\text{i}\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

$$= \frac{-\text{i}\sqrt{3}-1}{2}$$

$$= \overline{\frac{\text{i}\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \overline{\text{j}}$$

On a démontré que $\dfrac{1}{\mathrm{j}}$ est le conjugué de j.

On a donc $z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$. On en déduit que B est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses (ou axe des réels).

2^e^ méthode :

On a démontré que j est de module 1 donc $\mathrm{j} \times \bar{\mathrm{j}} = 1$. Par suite, $\dfrac{1}{\mathrm{j}} = \bar{\mathrm{j}}$.

3°) Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P*, d'affixe *z*, tels que $\left| \mathrm{j}z - 1 \right| = 1$.
On attend une rédaction très soignée.

Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \left| \mathrm{j}z - 1 \right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \left| \mathrm{j}\left(z - \frac{1}{\mathrm{j}} \right) \right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \left| \mathrm{j} \right| \times \left| z - \frac{1}{\mathrm{j}} \right| = 1 \\
&\Leftrightarrow 1 \times \left| z - z_{\mathrm{B}} \right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \left| z - z_{\mathrm{B}} \right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{BM} = 1
\end{aligned}$$

Donc *E* est le cercle de centre B et de rayon 1.

II. Soit *m* un réel fixé tel que $0 < m < 1$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\mathrm{e}^{x} - 1 \right)^{2} = m \quad \left(\mathrm{E}_{m} \right)$.

On ne développe surtout pas le premier membre.

$\left(\mathrm{E}_{m} \right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} - 1 = \sqrt{m}$ ou $\mathrm{e}^{x} - 1 = -\sqrt{m}$ (car $m > 0$ par hypothèse)

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} = 1 + \sqrt{m}$ ou $\mathrm{e}^{x} = 1 - \sqrt{m}$ (car $m > 0$ par hypothèse)

$\Leftrightarrow x = \ln\left(1 + \sqrt{m} \right)$ (car $1 + \sqrt{m} > 0$ par hypothèse) ou $x = \ln\left(1 - \sqrt{m} \right)$ (car $m < 1$ par hypothèse donc $\sqrt{m} < 1$ et $1 - \sqrt{m} > 0$)

Soit S l'ensemble des solutions de $\left(\mathrm{E}_m\right)$.

$$S=\left\{\ln\left(1+\sqrt{m}\right)\,;\,\ln\left(1-\sqrt{m}\right)\right\}$$