1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 10 janvier 2018 (60 minutes)

Prénom et nom : ………………………..…………

Note : ….. / 20

On attend le plus grand soin pour la présentation des calculs et les tableaux de variations (à faire à la règle ainsi que les flèches).

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $[0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. On ne cherchera pas à arranger le résultat (on laisse le résultat sous la forme d'une somme).

$\forall x \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\qquad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

2°) Déterminer le sens de variation de *f* sur les intervalles $[0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
Faire une phrase du type : « *f* est strictement ………. sur les intervalles $[0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ » (modèle à recopier et à compléter).

………

………

Faire un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de f' et les variations de *f*.
Calculer au brouillon les extremums éventuels et compléter le tableau.

3°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 4.

…………………. (un seul résultat sans égalité)

Présenter sur les lignes ci-dessous les calculs justificatifs.

………

………

………

………

II. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points + 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{3}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Écrire sur la ligne ci-dessous l'expression de $f'(x)$ obtenue en appliquant les formules de dérivation, sans chercher à l'arranger (autrement dit donner le résultat à l'état « brut »).

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \qquad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

2°) Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur – 2.

………

………

………

………

………

………

………

………

3°) Écrire sur la ligne ci-dessous l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient avec numérateur factorisé.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\quad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

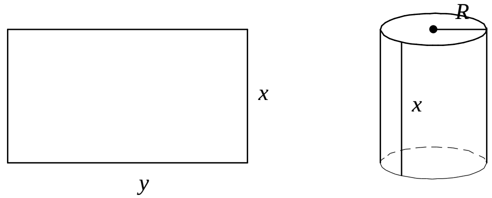
Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en …………………………………………… [écrire la (ou les) valeur(s) de x].

Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera le tableau de variations avec ces extremums.

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Dans cet exercice, les longueurs sont exprimées en centimètres.
On dispose d'une feuille rectangulaire de dimensions x et y dont le périmètre reste fixe, égal à 60. À l'aide de ce rectangle, on fabrique un cylindre de révolution de hauteur x et de rayon de base R.



1°) Exprimer le rayon R de la base en fonction de y, puis en fonction de x.

………

………

………

2°) Exprimer en fonction de x le volume V du cylindre en cm^3. On attend une seule expression sous forme factorisée.

………

………

………

………

………

………

3°) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs décimales approchées au centième par défaut des réels x pour lesquels le cylindre a pour volume 200 cm^3.
Rédiger une phrase réponse sur le modèle suivant à recopier :

« Les valeurs décimales approchées au centième par défaut des réels x pour lesquels le cylindre a pour volume 200 cm^3 sont égales à ………. ».

………

………

Conseils donnés à l'oral :

I. et **II.** Ne pas fermer les tableaux.

III. Respecter les notations : le rayon est noté R (majuscule) et non r (minuscule)

1°) On reste en calcul littéral.
On attend un égalité de la forme $R = ...$.

Corrigé du contrôle du 10-1-2018

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $[0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. On ne cherchera pas à arranger le résultat (on laisse le résultat sous la forme d'une somme).

$$\forall x \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{(un seul résultat)}$$

2°) Déterminer le sens de variation de *f* sur les intervalles $[0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
Faire une phrase du type : « *f* est strictement ………. sur les intervalles $[0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ » (modèle à recopier et à compléter).

$\forall x \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\quad f'(x) > 0$ de manière évidente donc *f* est strictement croissante sur les intervalles $[0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

On vérifie les variations de f à l'aide de la calculatrice.

Faire un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de f' et les variations de *f*.
Calculer au brouillon les extremums éventuels et compléter le tableau.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	|	+	||	+	
Variations de f	1	↗	||	↗	

$f(0) = 1$ [on fait figurer cette valeur dans le tableau ; c'est un minimum local]

3°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 4.

$\dfrac{13}{36}$ (un seul résultat sans égalité)

Présenter sur les lignes ci-dessous les calculs justificatifs.

On doit calculer le nombre dérivé de f en 4. On utilise la dérivée de *f*.

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + \frac{1}{(4-1)^2}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{13}{36}$$

On vérifie ce résultat à l'aide de la calculatrice.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{3}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Écrire sur la ligne ci-dessous l'expression de $f'(x)$ obtenue en appliquant les formules de dérivation, sans chercher à l'arranger (autrement dit donner le résultat à l'état « brut »).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \qquad f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} \quad \text{(un seul résultat)}$$

Pour calculer simplement la dérivée, on effectue la réécriture suivante : $f(x) = x + 3 \times \dfrac{1}{x-2}$.

2°) Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur – 2.

On résout l'équation $f'(x) = -2 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$$1 - \frac{3}{(x-2)^2} = -2$$

$$\frac{3}{(x-2)^2} = 3$$

$(x-2)^2 = 1$ /!\ On ne développe surtout pas le membre de gauche.

$x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1$

$x = 3$ ou $x = 1$

On a $f(3)=3+\dfrac{3}{3-2}=6$ et $f(1)=1+\dfrac{3}{1-2}=-2$ (calculs immédiats).

$\mathcal{C}$ admet donc une tangente de coefficient directeur – 2 aux points $\text{A}(1\,;-2)$ et $\text{B}(3\,;6)$.

3°) Écrire sur la ligne ci-dessous l'expression de $f'(x)$ sous la forme d'un seul quotient avec numérateur factorisé.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\quad f'(x)=\dfrac{\left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right)}{(x-2)^2}$ (un seul résultat)

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\quad f'(x)=\frac{(x-2)^2-3}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{\left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right)}{(x-2)^2}$$ (utilisation de l'identité remarquable a^2-b^2)

Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ [écrire la (ou les) valeur(s) de *x*].

On n'écrit pas d'égalités.

Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
On calculera au brouillon les extremums locaux et l'on complétera le tableau de variations avec ces extremums.

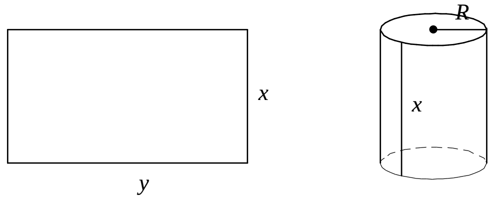
x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $\left(x-2-\sqrt{3}\right)\left(x-2+\sqrt{3}\right)$		+	0^{num}	–		–	0^{num}	+	
Signe de $(x-2)^2$		+		+	$0^{\text{dén}}$	+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0^{num}	–	||	–	0^{num}	+	
Variations de f		↗	$2-2\sqrt{3}$	↘	||	↘	$2+2\sqrt{3}$	↗	

On vérifie les variations de *f* à l'aide de la calculatrice.

À l'aide de la calculatrice, on obtient immédiatement les valeurs des extremums locaux :
$f\left(2-\sqrt{3}\right)=2-2\sqrt{3}$ (maximum local) et $f\left(2+2\sqrt{3}\right)=2+2\sqrt{3}$ (minimum local).
Il est intéressant de calculer les valeurs de ces extremums à la main, en guise d'entraînement aux calculs.

III.

Dans cet exercice, les longueurs sont exprimées en centimètres.
On dispose d'une feuille rectangulaire de dimensions *x* et *y* dont le périmètre reste fixe, égal à 60. À l'aide de ce rectangle, on fabrique un cylindre de révolution de hauteur *x* et de rayon de base *R*.



1°) Exprimer le rayon *R* de la base en fonction de *y*, puis en fonction de *x*.

On réfléchit sur le patron du cylindre.

Le rectangle est la surface latérale du cylindre donc $y=$ périmètre du cercle de la base.

Chaque cercle de base a pour rayon *R* donc a pour périmètre $2\pi R$.

On a $2\pi R=y$ d'où $R=\dfrac{y}{2\pi}$.

On sait que $2(x+y)=60$ donc $x+y=30$.

Par suite, $y=30-x$.

On obtient $R=\dfrac{30-x}{2\pi}$.

2°) Exprimer en fonction de *x* le volume V du cylindre en cm^3. On attend une seule expression sous forme factorisée.

$$\text{V}=\pi\times R^2\times x$$

$$=\pi\times\left(\frac{30-x}{2\pi}\right)^2\times x$$

$$=\pi\times\frac{(30-x)^2}{4\pi^2}\times x$$

$$=\cancel{\pi}\times\frac{(30-x)^2}{4\pi\times\cancel{\pi}}\times x$$

$$=\frac{x(30-x)^2}{4\pi}$$

3°) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs décimales approchées au centième par défaut des réels x pour lesquels le cylindre a pour volume $200\ \text{cm}^3$.
Rédiger une phrase réponse sur le modèle suivant à recopier :

« Les valeurs décimales approchées au centième par défaut des réels x pour lesquels le cylindre a pour volume 200 cm^3 sont égales à ………. ».

On résout l'équation $\text{V} = 200 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{x(30-x)^2}{4\pi} = 200$$

$$x(30-x)^2 = 800\pi$$

$$x\left(x^2 - 60x + 900\right) = 800\pi$$

$$x^3 - 60x^2 + 900x - 800\pi = 0$$

Il s'agit d'une équation polynomiale du troisième degré.

On utilise l'application de la calculatrice qui permet de résoudre des équations polynomiales (de manière exacte ou approchée).

On obtient l'affichage suivant :

$\text{X}_1 = \dfrac{107470\pi}{8857}$ ou $\text{X}_1 = 38{,}11978802$
$\text{X}_2 = 18{,}27188351$
$\text{X}_3 = 3{,}60832847$

Il s'agit de valeurs approchées des trois solutions de l'équation (1).

Or $0 < x < 30$ donc les valeurs décimales approchées au centième par défaut des réels x tels que $\text{V} = 200$ sont 3,60 et 18,27.