1$^{\text{ère}}$ S1

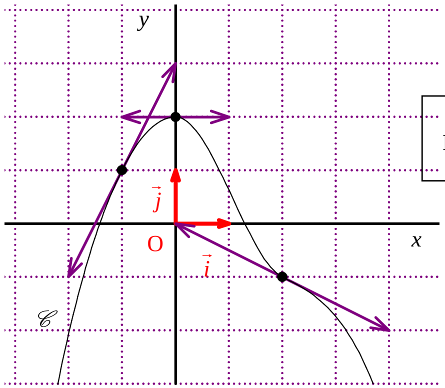
Contrôle du vendredi 15 décembre 2017 (50 min)

Prénom : ………………………………. **Nom :** ……………………………….

Note : …. / 20

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

On considère une fonction f dérivable sur son domaine de définition dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous.



Ne rien écrire sur le graphique.

1°) Par lecture graphique, compléter les égalités : $f'(-1) =$ ………. ; $f'(0) =$ ………. ; $f'(2) =$ ……….
On attend une seule réponse à chaque fois.

2°) Déterminer une équation des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses – 1 et 2.

………………………………………… ………………………………………

On attend une seule équation à chaque fois.

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point + 1 point + 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On sait que $\mathscr{C}$ est une parabole de sommet S.

1°) Déterminer les coordonnées de S en présentant les calculs selon le modèle suivant à recopier et compléter dans l'espace vide ci-dessous : S $\left| \begin{array}{l} x_S = \text{……….} = \text{……} \\ y_S = \text{……….} = \text{……} \end{array} \right.$ (écrire une étape de calcul puis le résultat).

2°) Soit h un réel quelconque différent de 0.

Exprimer $f(2+h) - f(2)$ puis $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ en fonction de h sous forme simplifiée.

On veillera à présenter le mieux possible les calculs. On attend en particulier que les traits de fraction soient faits à la règle et bien positionnés par rapport au signe $=$.

……

……

……

……

……

……

……

……

Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers …… .

En déduire que f est dérivable en 2 et donner le nombre dérivé de f en 2. On répondra par une phrase.

……

……

……

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

3°) Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2. On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Recopier et compléter la phrase suivante permettant de définir T :

« T est la droite passant par … et de coefficient directeur … . »

On ne demande pas de calculer l'ordonnée de A.

……

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au A point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$?

Donner la réponse puis présenter les calculs sur les lignes ci-dessous.

……………… (une seule réponse)

………

………

………

3°) Quelles sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = 3 - \dfrac{x}{2}$?

……………………………………………… (on séparera les valeurs, sans égalités, par des points-virgules)

Écrire sur les lignes ci-dessous l'équation qui permet de résoudre la question puis présenter la résolution de cette équation.

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On choisit un nombre de départ, par exemple 1, qui va nous permettre de construire une suite de nombres en utilisant la fonction *f*.

On calcule l'image de ce nombre par *f*. On obtient $f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

On recommence avec $\dfrac{1}{2}$. On calcule l'image de $\dfrac{1}{2}$ par *f*. On obtient $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$.

On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 1 ; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction *f*.

1°) On choisit -2 pour nombre de départ.

Écrire les 3 nombres suivants obtenus par le procédé puis présenter le détail des calculs sur les lignes ci-dessous.

……………………………………………… (on séparera les valeurs par des points-virgules)

………

………

………

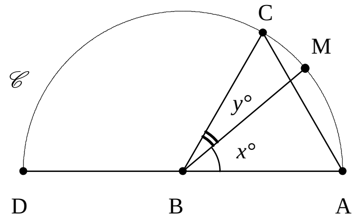
2°) On choisit 1 pour nombre de départ. Utiliser la commande « rép » de la calculatrice pour donner la valeur exacte du dixième nombre de la suite (1 est le premier nombre de la suite).

…………… (une seule réponse sans égalité)

V. (2 points)

Soit ABC un triangle équilatéral. On note D le symétrique de A par rapport à B et $\mathscr{C}$ le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{AD}]$. Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$. On note *x* la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{ABM}}$ et *y* la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{CBM}}$.

Exprimer *y* en fonction de *x*.



Ne rien écrire sur la figure.

……………………………………… (une seule égalité)

Conseils donnés à l'oral

II. 3°) On ne demande pas l'ordonnée du point A.

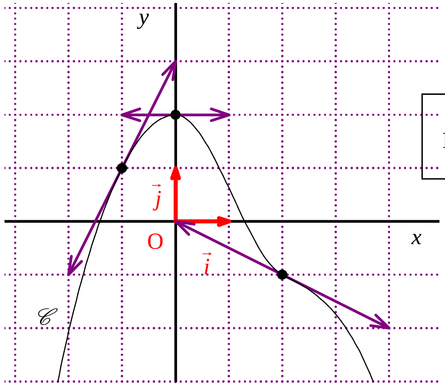
IV. 1°) Écrire les calculs. On attend le détail des calculs.

V. On attend une seule expression.

Corrigé du contrôle du 15-12-2017

I.

On considère une fonction *f* dérivable sur son domaine de définition dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous.



Ne rien écrire sur le graphique.

1°) Par lecture graphique, compléter les égalités : $f\,'(-1)=2$; $f\,'(0)=0$; $f\,'(2)=-\dfrac{1}{2}$.

On attend une seule réponse à chaque fois.

2°) Déterminer une équation des tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses – 1 et 2.

$$y=2x+3 \qquad\qquad y=-\frac{x}{2}$$

On attend une seule équation à chaque fois.

On détermine ces équations soit en utilisant l'équation de la tangente donnée dans le cours [$y=f\,'(a)(x-a)+f(a)$] soit par lecture graphique des ordonnées à l'origine.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x-\dfrac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On sait que $\mathscr{C}$ est une parabole de sommet S.

1°) Déterminer les coordonnées de S en présentant les calculs selon le modèle suivant à recopier et compléter dans l'espace vide ci-dessous : S $\left|\begin{array}{l} x_S=\text{.........}=\text{......} \\ y_S=\text{.........}=\text{......}\end{array}\right.$ (écrire une étape de calcul puis le résultat).

$$\text{S}\left|\begin{array}{l} x_S=-\dfrac{1}{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=1 \\ y_S=1-\dfrac{1^2}{2}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

On applique les formules du cours pour déterminer le sommet d'une parabole.

2°) Soit *h* un réel quelconque différent de 0.

Exprimer $f(2+h)-f(2)$ puis $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ en fonction de *h* sous forme simplifiée.

On veillera à présenter le mieux possible les calculs. On attend en particulier que les traits de fraction soient faits à la règle et bien positionnés par rapport au signe $=$.

On sépare les différents calculs.

$f(2)=0$ par calcul mental [on vérifie sur calculatrice graphique]

$$\begin{aligned} f(2+h)&=2+h-\frac{(2+h)^2}{2} \\ &=2+h-\frac{4+4h+h^2}{2} \\ &=-h-\frac{h^2}{2}\end{aligned}$$

On a donc $f(2+h)-f(2)=-h-\dfrac{h^2}{2}$.

On peut aussi écrire $f(2+h)-f(2)=\dfrac{-2h-h^2}{2}$ ou $f(2+h)-f(2)=-\dfrac{2h+h^2}{2}$.

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{-2-h}{2}$ (calcul mental, inutile d'écrire $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{\dfrac{-2h-h^2}{h}}{h}$)

On peut aussi écrire $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\dfrac{2+h}{2}$.

Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque *h* tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers …… .

En déduire que *f* est dérivable en 2 et donner le nombre dérivé de *f* en 2. On répondra par une phrase.

Lorsque *h* tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers – 1.

Comme le résultat de cette limite est fini, *f* est dérivable en 2 et le nombre dérivé de *f* en 2 est égal à – 1.

On peut donc écrire $f\,'(2)=-1$.

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

On vérifie les résultats grâce à la calculatrice.

3°) Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2. On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Recopier et compléter la phrase suivante permettant de définir T :
« T est la droite passant par … et de coefficient directeur … . »
On ne demande pas de calculer l'ordonnée de A.

T est la droite passant par A et de coefficient directeur – 1.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ (un seul résultat)

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au A point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$?
Donner la réponse puis présenter les calculs sur les lignes ci-dessous.

– 4 (une seule réponse)

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

On vérifie le résultat grâce à la commande de la calculatrice permettant d'obtenir le nombre dérivé d'une fonction en un réel.

3°) Quelles sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = 3 - \dfrac{x}{2}$?

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ (on séparera les valeurs, sans égalités, par des points-virgules)

Écrire sur les lignes ci-dessous l'équation qui permet de résoudre la question puis présenter la résolution de cette équation.

La droite D a pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à D sont les solutions de l'équation

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ (1).

(1) est successivement équivalente à (trois lignes de résolution suffisent !) :

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à D sont les points d'abscisses $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On choisit un nombre de départ, par exemple 1, qui va nous permettre de construire une suite de nombres en utilisant la fonction *f*.
On calcule l'image de ce nombre par *f*. On obtient $f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
On recommence avec $\dfrac{1}{2}$. On calcule l'image de $\dfrac{1}{2}$ par *f*. On obtient $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$.
On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 1 ; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction *f*.

1°) On choisit -2 pour nombre de départ.
Écrire les 3 nombres suivants obtenus par le procédé puis présenter le détail des calculs sur les lignes ci-dessous.

2 ; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{2}{5}$ (on séparera les valeurs par des points-virgules)

$$f(-2) = \frac{-2}{-2+1} = 2$$

$$f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{2}{5}$$

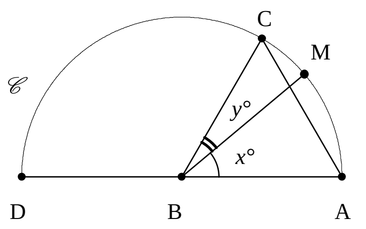
2°) On choisit 1 pour nombre de départ. Utiliser la commande « rép » de la calculatrice pour donner la valeur exacte du dixième nombre de la suite (1 est le premier nombre de la suite).

$\dfrac{1}{10}$ (une seule réponse sans égalité)

1^{er}	2^{e}	3^{e}	4^{e}	5^{e}	6^{e}	7^{e}	8^{e}	9^{e}	10^{e}
1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{10}$

V.

Soit ABC un triangle équilatéral. On note D le symétrique de A par rapport à B et $\mathscr{C}$ le demi-cercle de diamètre $[\mathrm{AD}]$. Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$. On note x la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{ABM}}$ et y la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{CBM}}$.
Exprimer y en fonction de x.



Ne rien écrire sur la figure.

$y = |x - 60|$ (une seule égalité)

Les angles géométriques d'un triangle équilatéral (ici ABC) mesurent 60°. Donc $\widehat{\mathrm{ABC}} = 60°$.

On récapitule : $\widehat{\mathrm{ABM}} = x°$; $\widehat{\mathrm{CBM}} = y°$; $\widehat{\mathrm{ABC}} = 60°$.

On distingue deux cas en faisant une figure dans chaque cas.

• Si $0 \leqslant x \leqslant 60$, alors $\mathrm{M} \in \overset{\frown}{\mathrm{AC}}$.
Dans ce cas, $y = 60 - x$.

• Si $x \geqslant 60$, alors $\mathrm{M} \in \overset{\frown}{\mathrm{CD}}$.
Dans ce cas, $y = x - 60$.

Dans les deux cas, on peut écrire $y = |x - 60|$ ou encore $y = |60 - x|$.