**1$^{\text{ère}}$ S1**

# Contrôle du mercredi 29 novembre 2017 (50 min)

**Prénom :** ………………………………. **Nom :** ……………………………….  **Note : …. / 20**

## I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point ; 3°) 3 points ; question bonus sur 1 point)

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule rouge, trois boules jaunes et $n$ boules bleues ($n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1), toutes indiscernables au toucher.
Le joueur tire une boule du sac.

- Si la boule tirée est rouge, il reçoit 1 € ;
- Si la boule tirée est bleue, il perd 1 €.
- Si la boule tirée est jaune, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

1°) Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où $P$ désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Faire les traits de fractions à la règle.

| $x_i$ | 1 | $-1$ | 0 |
|---|---|---|---|
| $P(\mathrm{X} = x_i)$ | | | |

2°) Dans cette question, on suppose que $n = 6$.
Calculer l'espérance et la variance de X.
On détaillera uniquement sur les lignes ci-dessous le calcul de la variance (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »). Vérifier les résultats à la calculatrice.

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) =$ ………………… $\mathrm{V}(\mathrm{X}) =$ …………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

3°) On revient au cas général où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.
Exprimer l'espérance de X en fonction de $n$ sous la forme la plus simple possible.

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

**Question bonus :** Exprimer la variance de X en fonction de $n$ sous la forme la plus simple possible.

………………………………………………………… (une seule égalité)

## II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, P)$ qui prend les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(\mathrm{X} = x_i)$ | $a$ | $a^2$ | 0,61 |

1°) Quelle est la valeur de $a$ ? ……………….. (une seule égalité, résultat sous forme décimale)

2°) On note F la fonction de répartition de X.
Donner les valeurs de $\mathrm{F}(x)$ suivant les valeurs de $x$. On se contentera de donner les résultats en distinguant des cas sans détailler les calculs (un cas par ligne).

…………………………………………………………………………………………………………

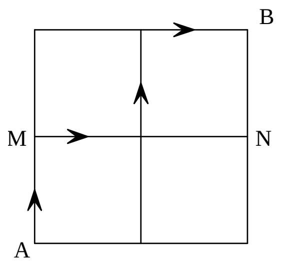
…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

**III. (2 points)**

On dispose du quadrillage présenté ci-dessous. Un chemin de A vers B est une suite de quatre déplacements d'une case : deux déplacements vers le haut (H) et deux déplacements vers la droite (D) dans n'importe quel ordre.
Un exemple de chemin possible est HDHD.




On choisit au hasard l'un des chemins de A vers B.

Quelle est la probabilité que ce chemin passe par au moins l'un des points M ou N ?

……… (un seul résultat sans égalité)

---

**IV. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)**

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$, $c$ sont trois réels, $a$ étant non nul.
On sait que les points $\text{A}\left(1\,;1\right)$, $\text{B}\left(-1\,;-1\right)$ et $\text{C}\left(2\,;5\right)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.

1°) Écrire les égalités vérifiées par $a$, $b$, $c$.

…………………………………………………..

…………………………………………………..

…………………………………………………..

À l'aide de l'application de la calculatrice permettant de résoudre les systèmes linéaires, déterminer les valeurs de $a$, $b$, $c$.

…..…………………………………………………………………………………… (écrire trois égalités)

2°) On suppose que $a$, $b$, $c$ ont les valeurs trouvées préalablement.
Quelles sont les coordonnées du sommet S de $\mathscr{C}$ ?

………………………………… (une réponse)

3°) Compléter la phrase suivante :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses sont …..……………… et …..………………. .

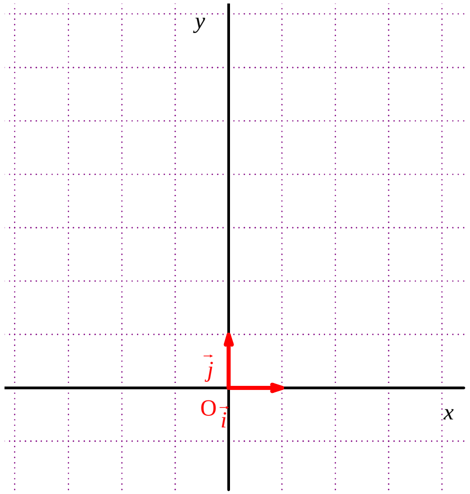
---

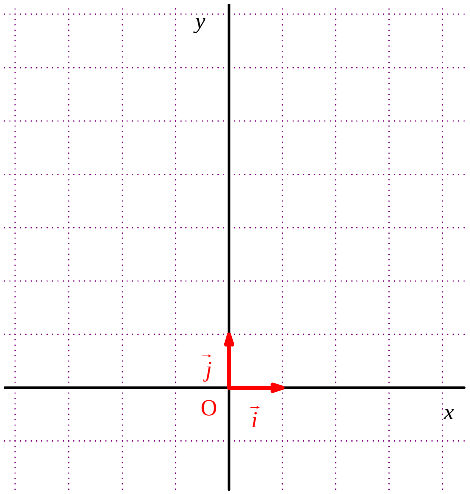
**V. (2 points : 1 point + 1 point)**

Le plan est muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur le graphique de gauche, tracer en vert la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2 - 1$.

Sur le graphique de droite, tracer en vert la courbe $\Gamma$ d'équation $y = \left|x^2 - 1\right|$.




Écrire le nom des courbes sur chaque graphique.

# Conseils donnés à l'oral

**I.** Il est demandé de bien présenter les calculs.

Commencer par $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \ldots$ ou $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \ldots$ .

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \ldots \\ &= \ldots\end{aligned}$$

---

**III.** Chaque trajet part de A et arrive en B.

---

**IV.** 2°) On n'écrit pas d'égalité.

# Corrigé du contrôle du 29-11-2017

## I.

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule rouge, trois boules jaunes et *n* boules bleues (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1), toutes indiscernables au toucher.
Le joueur tire une boule du sac.

- Si la boule tirée est rouge, il reçoit 1 € ;
- Si la boule tirée est bleue, il perd 1 €.
- Si la boule tirée est jaune, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

1°) Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où *P* désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Faire les traits de fractions à la règle.

| $x_i$ | 1 (rouge) | $-1$ (bleue) | 0 (jaune) |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\dfrac{1}{n+4}$ | $\dfrac{n}{n+4}$ | $\dfrac{3}{n+4}$ |

Le nombre total de boules est $1+3+n = n+4$.

2°) Dans cette question, on suppose que $n = 6$.
Calculer l'espérance et la variance de X.
On détaillera uniquement sur les lignes ci-dessous le calcul de la variance (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »). Vérifier les résultats à la calculatrice.

$$E(X) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad V(X) = \frac{9}{20}$$

On écrit la loi de probabilité de X pour $n = 6$.

| $x_i$ | 1 | $-1$ | 0 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{6}{10}$ | $\dfrac{3}{10}$ |

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + (-1) \times \frac{6}{10} + 0 \times \frac{3}{10}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{10} + (-1)^2 \times \frac{6}{10} + 0^2 \times \frac{3}{10} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{9}{20}$$

On vérifie les deux résultats à la calculatrice.

3°) On revient au cas général où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1 quelconque.
Exprimer l'espérance de X en fonction de *n* sous la forme la plus simple possible.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{n+4} + (-1) \times \frac{n}{n+4} + 0 \times \frac{3}{n+4}$$

$$= \frac{1}{n+4} - \frac{n}{n+4}$$

$$= \frac{1-n}{n+4}$$

Pour $n = 6$, on retrouve le résultat de l'espérance trouvé à la question précédente.

**Question bonus :** Exprimer la variance de X en fonction de *n* sous la forme la plus simple possible.

$$V(X) = \frac{3+7n}{(n+4)^2} \text{ (une seule égalité)}$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{n+4} + (-1)^2 \times \frac{n}{n+4} + 0^2 \times \frac{3}{n+4} - \left(\frac{1-n}{n+4}\right)^2$$

$$= \frac{1+n}{n+4} - \left(\frac{1-n}{n+4}\right)^2$$

$$= \frac{(1+n)(n+4) - (1-n)^2}{(n+4)^2}$$

$$= \frac{n^2 + 5n + 4 - (1 - 2n + n^2)}{(n+4)^2}$$

$$= \frac{7n+3}{(n+4)^2}$$

**II.**

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, P)$ qui prend les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(\mathrm{X} = x_i)$ | $a$ | $a^2$ | 0,61 |

1°) Quelle est la valeur de $a$ ? $a = 0{,}3$ (une seule égalité, résultat sous forme décimale)

On a $a + a^2 + 0{,}61 = 1$ soit $a^2 + a - 0{,}39 = 0$.

On résout cette équation à la main (discriminant égal à 2,56) ou à l'aide de la calculatrice.
On retient uniquement la solution qui appartient à l'intervalle $[0\,;1]$.

2°) On note F la fonction de répartition de X.
Donner les valeurs de $\mathrm{F}(x)$ suivant les valeurs de $x$. On se contentera de donner les résultats en distinguant des cas sans détailler les calculs (un cas par ligne).

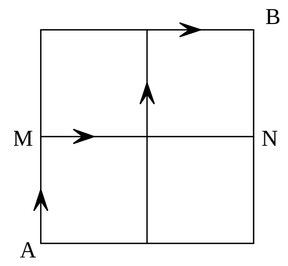
- Si $x < 1$, alors $\mathrm{F}(x) = 0$.
- Si $1 \leqslant x < 2$, alors $\mathrm{F}(x) = 0{,}3$.
- Si $2 \leqslant x < 3$, alors $\mathrm{F}(x) = 0{,}39$.
- Si $x \geqslant 3$, alors $\mathrm{F}(x) = 1$.

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(\mathrm{X} = x_i)$ | 0,3 | 0,09 | 0,61 |

**III.**

On dispose du quadrillage présenté ci-dessous. Un chemin de A vers B est une suite de quatre déplacements d'une case : deux déplacements vers le haut (H) et deux déplacements vers la droite (D) dans n'importe quel ordre.
Un exemple de chemin possible est HDHD.



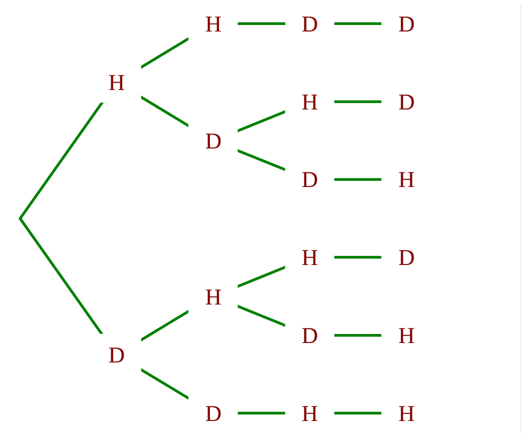

On choisit au hasard l'un des chemins de A vers B.

Quelle est la probabilité que ce chemin passe par au moins l'un des points M ou N ?

$\dfrac{5}{6}$ (un seul résultat sans égalité)

Il y a six chemins au total partant de A et arrivant en B.
On les trouve soit en faisant un arbre, soit en les traçant tous, soit en faisant un arbre de possibilités.

Chemins possibles :




| |
|---|
| H H D D |
| H D H D |
| H D D H |
| D H H D |
| D H D H |
| D D H H |

Tous ces chemins sont équiprobables.

Il y a 6 chemins passent par au moins l'un des points M ou N.

---

**IV.**

Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$, $c$ sont trois réels, $a$ étant non nul.
On sait que les points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.

1°) Écrire les égalités vérifiées par $a$, $b$, $c$.

$$a + b + c = 1$$

$$a - b + c = -1$$

$$4a + 2b + c = 5$$

À l'aide de l'application de la calculatrice permettant de résoudre les systèmes linéaires, déterminer les valeurs de $a$, $b$, $c$.

$a = 1$ ; $b = 1$ ; $c = -1$ (écrire trois égalités)

2°) On suppose que $a$, $b$, $c$ ont les valeurs trouvées préalablement.
Quelles sont les coordonnées du sommet S de $\mathscr{C}$ ?

$S\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{5}{4}\right)$ (une réponse)

$\mathscr{C}$ a pour équation $y = x^2 + x - 1$.
On applique la formule donnant les coordonnées du sommet d'une parabole et on vérifie sur l'écran de la calculatrice graphique.

3°) Compléter la phrase suivante :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

On résout l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ à la main ou à l'aide de la calculatrice.

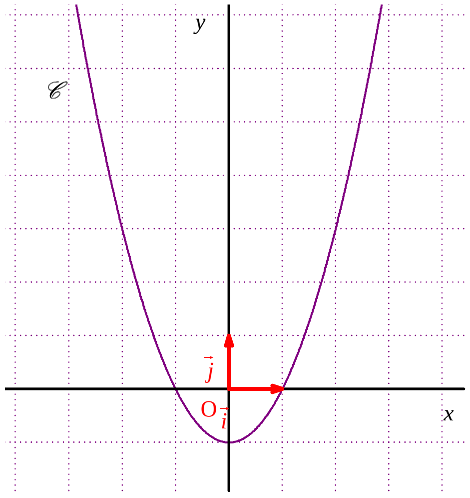
---

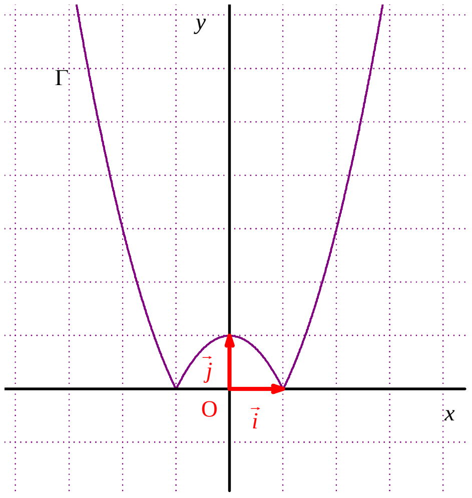
**V.**

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Sur le graphique de gauche, tracer en vert la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2 - 1$.

Sur le graphique de droite, tracer en vert la courbe $\Gamma$ d'équation $y = \left| x^2 - 1 \right|$.




Écrire le nom des courbes sur chaque graphique.