1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 16 novembre 2017 (3 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………..…………

Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé.

I. (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes. On se contentera de donner les réponses directement sans justifier.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1-\dfrac{|\,x\,|-1}{3}\geqslant 0$.

2°) Soit a et b deux réels tels que $a^2+b^2=1$.
Exprimer $\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\right)^2$ en fonction de b sous la forme la plus simple possible.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4+x^2-2=0$.

4°) Déterminer le tableau de signes de $f(x)=x-\dfrac{x+1}{2x}$.

5°) On considère l'équation $mx^2+(1-2m)x+m-2=0$ (E_m) d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ où m désigne un réel non nul.
Déterminer pour quelle valeur du réel m l'équation (E_m) admet une racine double.

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; 5°) a) 0,5 point ; b) 0,5 point)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto x-m|\,x-1\,|$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Exprimer $f_m(x)$ sans barres de valeur absolue.

2°) On admet qu'une fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;1]$.

Pour quelles valeurs de m la fonction f_m est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

3°) Dans cette question, on prend $m=4$.
Calculer $f_4\left(2-\sqrt{3}\right)$. On attend la valeur exacte.

4°) On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel où les variables x et y sont des nombres réels.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $x\geqslant 1$
  Alors y prend la valeur $2-x$
  Sinon y prend la valeur $3x-2$
FinSi

Sortie :
Afficher y

a) La valeur de y affichée en sortie est égale à l'image de x par une fonction f_m.
Indiquer sans justifier la valeur de m.

b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x on obtient -1 en sortie.

5°) Dans cette question, on prend $m=\dfrac{1}{2}$ et l'on pose $g=f_{\frac{1}{2}}$. On admet que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Vérifier au brouillon que $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h=\dfrac{1}{g}$.

b) Dresser le tableau de variations de h.

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

1°) Vérifier que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels on a : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

2°) Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ de réels vérifiant les égalités $x^3+y^3=98$ (1) et $x+y=2$ (2).

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[\mathrm{AC}]$ et J le point défini par l'égalité vectorielle $2\overrightarrow{\mathrm{JA}}-\overrightarrow{\mathrm{JB}}-3\overrightarrow{\mathrm{JC}}=\vec{0}$.

Pour les deux questions de l'exercice, il est demandé de ne pas rapporter le plan à un repère.
Il est conseillé de faire une figure au brouillon.

1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

2°) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est colinéaire au vecteur $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les droites D et D' d'équations cartésiennes respectives $2x-3y-5=0$ et $4x+6y-1=0$. On note A le point de D d'abscisse 3.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D'' passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-5)$.

2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de D' et D''.

Prénom et nom : ……………………………………………………………

Note : …. / 20

I (5)	II (5)	III (4)	IV (3)	V (3)	Total/20

I. (5 points)

1°) ………………………….. (écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation sans égalité)

2°) ………………………………………………………………………… (une seule égalité)

3°) ………………………….. (écrire l'ensemble des solutions de l'équation sans égalité)

4°) Faire le tableau de signes détaillé dans l'espace ci-dessous.

5°) ………………….. (une seule égalité)

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) a) 0,5 point ; b) 0,5 point ; 5°) a) 0,5 point ; b) 0,5 point)

1°) ……...

………...

………...

………...

………...

………...

2°) ……...

………...

………...

………...

………...

3°) ……...

………...

………...

………...

………...

4°) a) ……………………… (une seule égalité)

b) ……………………………………………… (écrire les valeurs sans égalités, séparées par des points-virgules)

5°) a) …………………………………………… (une seule réponse sans égalité)

b) Faire le tableau de variations à la règle.

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

1°) ……...

………...

………...

2°) ....

....

....

....

....

....

....

....

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) ....

....

....

....

....

2°) ....

....

....

....

....

....

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Conseils de rédaction et de présentation

I.

II.

1°) On attend des expressions sous la forme $ax+b$ où a et b sont des réels dépendant de m.

2°) On attend une justification succincte mais claire.

3°) On prendra soin de bien présenter les calculs en colonne en justifiant éventuellement.

III.

1°) On fera très attention à la présentation des calculs en colonnes. On écrira seulement trois lignes.

2°) On tâchera de rédiger le mieux possible.

« D'après la question 1°), on a :… » ; « Considérons le polynôme … ».

On veillera à ne pas utiliser de lettres n'ayant pas été définies auparavant.

IV.

On attend des calculs vectoriels très bien présentés.

On pourra faire une figure au brouillon.

V.

1°) On adoptera le modèle de rédaction suivant à recopier intégralement sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

M $\in D''$ si et seulement si ……………………………………………………………………………………

si et seulement si $\begin{vmatrix} \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} \end{vmatrix} = \text{.....}$

si et seulement si ……………………………………………………………………………………

si et seulement si ……………………………………………………………………………………

si et seulement si ……………………………………………………………………………………

D'' a pour équation cartésienne ……………………………………………….. .

2°) On ne demande pas de vérifier que D' et D'' sont sécantes.

On rédigera ainsi : « Le couple de coordonnées de B est la solution du système $\begin{cases} \text{..........................} = 0 \\ \text{..........................} = 0 \end{cases}$.

On rappelle la présentation à l'aide multiplicateurs.

$$\begin{cases} \text{............} = \text{....} \\ \text{............} = \text{....} \end{cases} \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right. \qquad \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right.$$

$\begin{cases} \text{................} = \text{................} \\ \text{................} = \text{................} \end{cases}$ $\begin{matrix} (\leftarrow \text{ ligne avec } x) \\ (\leftarrow \text{ ligne avec } y) \end{matrix}$

$\begin{cases} \text{................} = \text{................} \\ \text{................} = \text{................} \end{cases}$ $\begin{matrix} (\text{égalité du type } x = \text{...}) \\ (\text{égalité du type } y = \text{...}) \end{matrix}$

Le couple solution du système est : ………………... .

Corrigé du contrôle du 16-11-2017

I.

Les cinq questions sont indépendantes. On se contentera de donner les réponses directement sans justifier.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1-\dfrac{|\,x\,|-1}{3}\geqslant 0$.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$3-\left(|\,x\,|-1\right)\geqslant 0$ (multiplication des deux membres par 3 qui est strictement positif)

$4-|\,x\,|\geqslant 0$

$|\,x\,|\leqslant 4$

$-4\leqslant x\leqslant 4$

On écrit l'ensemble des solutions $\left[-4\,;4\right]$.

2°) Soit a et b deux réels tels que $a^2+b^2=1$.
Exprimer $\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\right)^2$ en fonction de b sous la forme la plus simple possible.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\right)^2&=\left(\sqrt{1-a}\right)^2+2\sqrt{1-a}\times\sqrt{1+a}+\left(\sqrt{1+a}\right)^2\\&=1\cancel{-a}+2\sqrt{(1-a)(1+a)}+1\cancel{+a}\\&=2+2\sqrt{1-a^2}\end{aligned}$$

Or $a^2+b^2=1$ donc $1-a^2=b^2$.

On peut donc achever le calcul.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\right)^2&=2+2\sqrt{b^2}\\&=2+2|\,b\,|\end{aligned}$$

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4+x^2-2=0$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4+x^2-2=0$ (1).

On pose $X=x^2$.

(1) s'écrit alors $X^2+X-2=0$ $(1')$.

On considère le polynôme X^2+X-2.

Les racines de ce polynôme sont 1 et – 2.

Or $X=x^2$.

On en déduit que (1) est successivement équivalente à :

$x^2=1$ ou $x^2=-2$

$x=1$ ou $x=-1$

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $\{1\,;-1\}$.

4°) Déterminer le tableau de signes de $f(x)=x-\dfrac{x+1}{2x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{2x}$

Les racines du polynôme $2x^2-x-1$ sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
SGN $2x^2-x-1$		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN $2x$		$-$	$\vert$	$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
SGN $f(x)$		$-$	0^{num}	$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

5°) On considère l'équation $mx^2+(1-2m)x+m-2=0$ (E_m) d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ où m désigne un réel non nul.
Déterminer pour quelle valeur du réel m l'équation (E_m) admet une racine double.

$\Delta=(1-2m)^2-4m(m-2)$ (attention, les parenthèses autour de $m-2$ sont obligatoires)

$=\left(1-4m+4m^2\right)-4m^2+8m$

$=1-4m+\cancel{4m^2}\cancel{-4m^2}+8m$

$=1+4m$

(E_m) admet une racine double si et seulement si $\Delta=0$

si et seulement si $m=-\dfrac{1}{4}$

II.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto x - m|x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Exprimer $f_m(x)$ sans barres de valeur absolue.

Si $x \geqslant 1$, alors $x-1 \geqslant 0$.
On a donc :
$$f_m(x) = x - m(x-1) = (1-m)x + m$$

Si $x \leqslant 1$, alors $x-1 \leqslant 0$.
On a donc :
$$f_m(x) = x - m(1-x) = (1+m)x - m$$

2°) On admet qu'une fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;1]$.

Pour quelles valeurs de m la fonction f_m est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $1-m>0$ $\boxed{\text{et}}$ $1+m>0$

si et seulement si $m<1$ $\boxed{\text{et}}$ $m>-1$

si et seulement si $-1<m<1$

3°) Dans cette question, on prend $m=4$.
Calculer $f_4\left(2-\sqrt{3}\right)$. On attend la valeur exacte.

1ère méthode : On utilise l'expression originale de f_4 avec les barres de valeurs absolues.

$$\begin{aligned} f_4\left(2-\sqrt{3}\right) &= 2-\sqrt{3}-4\left|2-\sqrt{3}-1\right| \\ &= 2-\sqrt{3}-4\left|1-\sqrt{3}\right| \\ &= 2-\sqrt{3}-4\left(\sqrt{3}-1\right) \quad (\text{car } 1-\sqrt{3}<0) \\ &= 6-5\sqrt{3} \end{aligned}$$

2e méthode : On utilise l'expression de f_4 sans barres de valeurs absolues trouvée à la question 1°).

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice [important à faire].

4°) On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel où les variables x et y sont des nombres réels.

```
Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si x ⩾ 1
    Alors y prend la valeur 2 – x
    Sinon y prend la valeur 3x – 2
FinSi

Sortie :
Afficher y
```

a) La valeur de y affichée en sortie est égale à l'image de x par une fonction f_m.
Indiquer sans justifier la valeur de m.

$$m=2$$

b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x on obtient – 1 en sortie.

$$3\ ;\ \frac{1}{3}$$

Pour répondre, on résout les équations $2-x=-1$ avec $x \geqslant 1$ et $3x-2=-1$ avec $x<1$.

5°) Dans cette question, on prend $m=\frac{1}{2}$ et l'on pose $g = f_{\frac{1}{2}}$. On admet que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Vérifier au brouillon que $g\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h=\frac{1}{g}$.

$$\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[\text{ ou } \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\} \text{(une seule réponse, sans égalité)}$$

b) Dresser le tableau de variations de h.

Le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x se déduit des variations de f et du fait que $g\left(\frac{1}{3}\right)=0$.

Le mieux est de faire un tableau de variations comme suit. Le signe de f apparaît immédiatement.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variations de g		– ↗	0	+ ↗	

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		–	0	+	

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variations de h		↘	‖	↘	

Attention à la légende : « Variations de h ».

On calcule l'image de 0 par g.

III.

1°) Vérifier que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels on a : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$

$\quad=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$\quad=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2°) Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ de réels vérifiant les égalités $x^3+y^3=98 \quad (1)$ et $x+y=2 \quad (2)$.

(2) donne $y=2-x \quad (2')$.

En remplaçant y par $2-x$, (1) donne alors $x^3+(2-x)^3=98 \quad (1')$.

$(1')$ est successivement équivalente à :

$\cancel{x^3}+8-6x^2+12x\cancel{-x^3}=98$

$8-6x^2+12x=98$

$6x^2-12x+90=0$

$6(x^2-2x+15)=0$

$x^2-2x+15=0$ [On simplifie par 3 les deux membres.]

$x=-3$ ou $x=5$ [Les racines sont obtenues grâce au discriminant réduit $\Delta'=1+15=16$, $\Delta'>0$]

Pour $x=-3$, $(2')$ donne $y=2+3=5$.

Pour $x=5$, $(2')$ donne $y=2-5=-3$.

On obtient deux couples : $(-3\,;5)$ et $(5\,;-3)$ (il y a une symétrie qui était prévisible dès le début)

On vérifie que ces deux couples conviennent.

Les solutions sont les couples $(-3\,;5)$ et $(5\,;-3)$.

IV.

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[\mathrm{AC}]$ et J le point défini par l'égalité vectorielle $2\overrightarrow{\mathrm{JA}}-\overrightarrow{\mathrm{JB}}-3\overrightarrow{\mathrm{JC}}=\vec{0}$.

Pour les deux questions de l'exercice, il est demandé de ne pas rapporter le plan à un repère.
Il est conseillé de faire une figure au brouillon.

1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On utilise l'égalité $2\overrightarrow{\mathrm{JA}}-\overrightarrow{\mathrm{JB}}-3\overrightarrow{\mathrm{JC}}=\vec{0}$ que l'on transforme grâce à la relation de Chasles en introduisant le point A.

$2\overrightarrow{\mathrm{JA}}-\left(\overrightarrow{\mathrm{JA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)-3\left(\overrightarrow{\mathrm{JA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\vec{0}$

$-2\overrightarrow{\mathrm{JA}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-3\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$

On obtient finalement $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

2°) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est colinéaire au vecteur $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

On a $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ (relation de Chasles).

Or I est le milieu de $[\mathrm{AC}]$ donc $\overrightarrow{\mathrm{IA}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

On reprend le calcul vectoriel.

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

On exprime $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

On a donc $2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Cette dernière égalité permet d'affirmer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est colinéaire au vecteur $3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

V.

Dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites D et D' d'équations cartésiennes respectives $2x-3y-5=0$ et $4x+6y-1=0$. On note A le point de D d'abscisse 3.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D'' passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-5)$.

On commence par déterminer l'ordonnée de A.

$\mathrm{A}\in D$ donc $2x_{\mathrm{A}}-3y_{\mathrm{A}}-5=0$ soit $6-3y_{\mathrm{A}}-5=0$ ce qui donne immédiatement $y_{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{3}$.

Donc $\mathrm{A}\left|\begin{array}{l}3\\ \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in D''$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{vmatrix} x-3 \\ y-\dfrac{1}{3} \end{vmatrix.}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-\dfrac{1}{3} & -5 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $-5x+15-3y+1=0$

si et seulement si $5x-3y+16=0$

D'' a pour équation cartésienne $5x-3y+16=0$.

2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de D' et D''.

On rédigera ainsi : « Le couple de coordonnées de B est la solution du système $\begin{cases} 4x+6y=1 \\ 5x+3y=16 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 6x=31 \\ 18y=-59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{31}{6} \\ y=-\dfrac{59}{18} \end{cases}$$

Le couple solution du système est $\left(\dfrac{31}{6}\,;-\dfrac{59}{18}\right)$.

Ainsi $\mathrm{B}\begin{vmatrix} \dfrac{31}{6} \\ -\dfrac{59}{18} \end{vmatrix.}$.