TS spécialité

Contrôle du mardi 7 novembre 2017 (1 heure)

Prénom : ……………   Nom : …………………………………………   **Note : …. / 20**

I. (4 points)

Déterminer le(s) couple(s) $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 = y^2 + 2017 \quad (1)$.
On pourra utiliser le fait que 2017 est un nombre premier.
Faire la recherche au brouillon et écrire les couples directement sur la ligne ci-dessous sans égalités, en les séparant par des virgules ou des points-virgules.

……………………………………

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année. Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.
Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1$^{\text{er}}$ août ! ».

1°) Vérifier que pour une personne née le 1$^{\text{er}}$ août le programme de calcul donne effectivement le nombre 308.

………

………

………

2°) Déterminer la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul du magicien. On ne demande pas de détailler la démarche.

………………………… (une seule réponse)

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Pour tout entier relatif n, on pose $a = n^2 - 2n + 10$ et $b = n + 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer les diviseurs communs à a et b.

1°) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $a = b \times (n-3) + 13$.

………

………

………

2°) Recopier et compléter la phrase (utilisation du lemme d'Euclide) :
« Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à …….. et ……… . »

………

………

3°) Recopier et compléter les modèles de rédaction suivants :
- 1$^{\text{er}}$ cas : n est un entier tel que $n+1$ est divisible par 13

Dans ce cas, les diviseurs communs à a et b sont …………….. (écrire les valeurs).
- 2$^{\text{e}}$ cas : n est un entier tel que $n+1$ n'est pas divisible par 13

Dans ce cas, les diviseurs communs à a et b sont …………….. (écrire les valeurs).

………

………

………

………

………

………

IV. (7 points)

Partie 1 (1 point)

On rappelle que l'on dit que deux entiers relatifs sont **premiers entre eux** pour exprimer que leurs seuls diviseurs communs sont 1 et – 1.
On rappelle les propriétés P et P' suivantes relatives à deux entiers relatifs a et b.
P : On suppose qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Alors a et b sont premiers entre eux.
P' : On suppose qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = -1$. Alors a et b sont premiers entre eux.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui constituent la démonstration de la propriété P :

① On en déduit que $d = 1$ ou $d = -1$.
② Or les diviseurs de 1 sont 1 et – 1.
③ Par conséquent, d divise 1.
④ d divise donc toute combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers.
⑤ Soit d un diviseur commun à a et b.
⑥ Par suite, a et b sont premiers entre eux.

Remettre les phrases dans l'ordre.

……………………………………………………………………………………………… (écrire les numéros)

Partie 2 (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ pour tout entier naturel n,

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls et on ne cherchera pas à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

1°) Calculer u_2 et v_2. On donnera uniquement les résultats.

……………………………………………………………………………………………….. (deux égalités)

2°) Dans cette question, on se propose de démontrer que pour tout entier naturel n, on a $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$ ».

Initialisation : (0 point)

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

D'une part,

$2u_0 - 3v_0 =$

D'autre part, $(-1)^{0+1} =$..............

Donc on peut écrire ……………………………………………. et par suite $P(0)$ est vraie.

Hérédité : (3 points)

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $2u_k - 3v_k = (-1)^{k+1}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $2u_{k+1} - 3v_{k+1} = (-1)^{k+2}$.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont premiers entre eux en utilisant les propriétés P et P'.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Une association qui organise des activités pour des enfants affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant ; les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :
• on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + 3(c_2 + c_4)$;
• la clé k est égale au chiffre des unités de S.

1°) Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ? Répondre par oui ou non. ……….

2°) Un employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro 08 $c_3c_4c_5k$ est transformé en 11 $c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ? Justifier.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Corrigé du contrôle du 7-11-2017

I.

Déterminer le(s) couple(s) $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tels que $x^2=y^2+2017$ (1).
On pourra utiliser le fait que 2017 est un nombre premier.
Faire la recherche au brouillon et écrire les couples directement sur la ligne ci-dessous sans égalités, en les séparant par des virgules ou des points-virgules.

$$(1009\,;1008)$$

$(1) \Leftrightarrow x^2-y^2=2017$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)=2017$

$\Leftrightarrow$ $x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs associés de 2017

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2017 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=2017 \\ x-y=1 \end{cases}$ [les diviseurs positifs de 2017 sont 1 et 2017 puisque 2017 est un nombre premier ; $x+y$ est un entier naturel donc positif]

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1009 \\ y=-1008 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=1009 \\ y=1008 \end{cases}$ (résolution immédiate par addition et soustraction membre à membre)

Comme x et y sont des entiers naturels, le seul couple vérifiant (1) est le couple $(1009\,;1008)$.

Remarques :

• On peut observer que, comme x et y sont des entiers naturels, on a : $x-y\leqslant x+y$.

• On peut écrire l'équivalence $(1) \Leftrightarrow x=\sqrt{y^2+2017}$ pour tout couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels mais cela ne conduit à rien pour la résolution.

II.

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année. Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.
Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1°) Vérifier que pour une personne née le 1er août le programme de calcul donne effectivement le nombre 308.

On effectue le calcul suivant : $1\times12+8\times37=308$.

2°) Déterminer la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul du magicien. On ne demande pas de détailler la démarche.

21 juin (une seule réponse)

Soit x le numéro du jour de naissance et y le numéro du mois de naissance pour le spectateur.

On a : $12x+37y=308$.

On cherche les entiers naturels x et y vérifiant cette relation sachant que $1\leqslant x\leqslant 31$ et $1\leqslant y\leqslant 12$.

On peut essayer chaque valeur de y.

On peut aussi écrire la relation sous la forme $y=\dfrac{308-12x}{37}$ puis utiliser la calculatrice pour obtenir un tableau de valeurs de la fonction affine $f : x \mapsto \dfrac{308-12x}{37}$ (début de table à 1 avec un pas de 1).

III.

Pour tout entier relatif n, on pose $a=n^2-2n+10$ et $b=n+1$.

Le but de cet exercice est de déterminer les diviseurs communs à a et b.
1°) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $a=b\times(n-3)+13$.

$$\begin{aligned} b\times(n-3)+13 &= (n+1)(n-3)+13 \\ &= n^2-2n-3+13 \\ &= n^2-2n+10 \\ &= a \end{aligned}$$

2°) Recopier et compléter la phrase (utilisation du lemme d'Euclide) :
« Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à …….. et ……… . »

Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs communs à b et 13.

3°) Recopier et compléter les modèles de rédaction suivants :
• 1er cas : n est un entier tel que $n+1$ est divisible par 13
Dans ce cas, les diviseurs communs à a et b sont …………….. (écrire les valeurs).
• 2e cas : n est un entier tel que $n+1$ n'est pas divisible par 13
Dans ce cas, les diviseurs communs à a et b sont …………….. (écrire les valeurs).

1er cas : n est un entier tel que $n+1$ est divisible par 13

Dans ce cas, les diviseurs communs à a et b sont 1, – 1, 13 et – 13.

2e cas : n est un entier tel que $n+1$ n'est pas divisible par 13

Dans ce cas, les diviseurs communs à a et b sont 1 et – 1.

Justification :

Les diviseurs de 13 sont 1, – 1, 13 et – 13.

Si n est un entier tel que $n+1$ est divisible par 13, alors les diviseurs communs à b et 13 sont 1, – 1, 13 et – 13.
Donc les diviseurs communs à a et b sont 1, – 1, 13 et – 13.

Si n est un entier tel que $n+1$ n'est pas divisible par 13, alors les diviseurs communs à b et 13 sont 1 et – 1.
Les diviseurs communs à a et b sont 1 et – 1.

IV.

Partie 1

On rappelle que l'on dit que deux entiers relatifs sont **premiers entre eux** pour exprimer que leurs seuls diviseurs communs sont 1 et – 1.
On rappelle les propriétés P et P' suivantes relatives à deux entiers relatifs a et b.
P : On suppose qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$. Alors a et b sont premiers entre eux.
P' : On suppose qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=-1$. Alors a et b sont premiers entre eux.

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui constituent la démonstration de la propriété P :

① On en déduit que $d=1$ ou $d=-1$.
② Or les diviseurs de 1 sont 1 et – 1.
③ Par conséquent, d divise 1.
④ d divise donc toute combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers.
⑤ Soit d un diviseur commun à a et b.
⑥ Par suite, a et b sont premiers entre eux.

Remettre les phrases dans l'ordre.

⑤ ④ ③ ② ① ⑥ (écrire les numéros)

Partie 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0=v_0=1$ et les relations de récurrence $u_{n+1}=2u_n+3v_n$ et $v_{n+1}=2u_n+v_n$ pour tout entier naturel n,

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls et on ne cherchera pas à déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

1°) Calculer u_2 et v_2. On donnera uniquement les résultats.

$u_2=19$ $\qquad$ $v_2=13$ (deux égalités)

2°) Dans cette question, on se propose de démontrer que pour tout entier naturel n, on a $2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

D'une part,

$$\begin{aligned}2u_0-3v_0&=2\times1-3\times1\\&=2-3\\&=-1\end{aligned}$$

D'autre part, $(-1)^{0+1}=-1$.

Donc on peut écrire $2u_0-3v_0=(-1)^{0+1}$ et par suite $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $2u_k-3v_k=(-1)^{k+1}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $2u_{k+1}-3v_{k+1}=(-1)^{k+2}$.

$$\begin{aligned}2u_{k+1}-3v_{k+1}&=4u_k+6v_k-6u_k-3v_k\\&=-2u_k+3v_k\\&=-(2u_k-3v_k)\\&=-(-1)^{k+1}\quad\text{(on utilise le fait que } P(k) \text{ est vraie par hypothèse de récurrence)}\\&=(-1)\times(-1)^{k+1}\\&=(-1)^{k+2}\end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont premiers entre eux en utilisant les propriétés P et P'.

• D'après la question précédente, pour tout entier naturel pair, $2u_n-3v_n=-1$.
Or $2u_n-3v_n$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de u_n et v_n.
D'après la propriété P', u_n et v_n sont premiers entre eux.

• D'après la question précédente, pour tout entier naturel impair, $2u_n-3v_n=1$.
Or $2u_n-3v_n$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de u_n et v_n.
D'après la propriété P, u_n et v_n sont premiers entre eux.

On en déduit que pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont premiers entre eux

---

V.

Une association qui organise des activités pour des enfants affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5\,k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant ; les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

• on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + 3(c_2 + c_4)$;

• la clé k est égale au chiffre des unités de S.

1°) Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ? Répondre par oui ou non. non

Pour ce numéro, $S = 1+1+8+3\times(1+3) = 22$.

Donc la clé associée aux cinq premiers chiffres est 2 et non 3.

Le numéro indiqué ne peut donc pas avoir été attribué à un enfant de l'association.

2°) Un employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro 08 $c_3c_4c_5\,k$ est transformé en 11 $c_3c_4c_5\,k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ? Justifier.

Il faut bien traduire l'énoncé.

On s'intéressé l'enfant né en 2008.
L'employé a pris les bons chiffres c_3, c_4, c_5. Le bon numéro est $08c_3c_4c_5k$.
L'employé a tapé 11 à la place de 08 et conservé les autres chiffres.

Pour l'enfant né en 2008, on note :
S_1 la somme associée aux cinq premiers chiffres (pour le bon numéro) ;
S_2 la somme associée sommes aux cinq premiers chiffres avec l'erreur de l'employé c'est-à-dire avec la mauvaise année de naissance.

$$S_1 = 0 + c_3 + c_5 + 3\times(8 + c_4) = c_3 + 3c_4 + c_5 + 24$$

$$S_2 = 1 + c_3 + c_5 + 3\times(1 + c_4) = c_3 + 3c_4 + c_5 + 4$$

On observe que $S_2 = S_1 + 20$.

Par conséquent, S_2 a le même chiffre des unités que S_1 et donc les clés associées à ces deux séries de cinq chiffres sont les mêmes.

L'erreur ne sera donc pas détectée.