TS1 et TS3 spécialité

Contrôle du jeudi 19 octobre 2017 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..…………… **Note :** ……../ 20

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Écrire sans justifier l’égalité de la division euclidienne de – 2017 par 10 puis compléter la phrase ci-dessous.

…………………………………………………….

Dans la division euclidienne – 2017 par 10, le quotient est égal à ………….. et le reste est égal à …………… .

2°) Écrire l’égalité de la division euclidienne de – 10 par 2017 puis compléter la phrase ci-dessous.

…………………………………………………….

Dans la division euclidienne – 10 par 2017, le quotient est égal à ………….. et le reste est égal à …………… .

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 + 3 points)

Les deux questions de l’exercice sont indépendantes.

1°) Soit x un entier relatif $\boxed{\text{pair}}$. On effectue la division euclidienne de x par 6.

Quelles sont les valeurs possibles du reste ? Répondre en écrivant les valeurs séparées par une virgule sans égalités.

…………………………………..……………….

2°) Déterminer le nombre d’entiers relatifs x vérifiant les conditions suivantes
(C_1) : Le reste de la division euclidienne de x par 6 est égal à 1.
(C_2) : $-2017 \leqslant x \leqslant 2017$.
On ne suppose pas que x est pair.

Écrire la réponse ci-dessous sans égalité et détailler la démarche sur les lignes ci-contre.

…………………

Pour la démarche à écrire sur les lignes ci-contre, on commencera en écrivant :
« Soit x un entier relatif vérifiant les conditions (C_1) et (C_2).
On note q le quotient de la division euclidienne de x par 6 ».

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Le but de l’exercice est de déterminer les entiers naturels n vérifiant la condition
(C) : « La division euclidienne de n par 43 donne un reste égal au cube du quotient ».

Dans les questions 1°) et 2°), on considère un entier naturel n vérifiant la condition (C) et on note q le quotient de la division euclidienne de n par 43. On sait que q est un entier naturel.

1°) Exprimer n en fonction de q et écrire une inégalité vérifiée par q. Répondre sans justifier.

………………………………………… …………………………………………

2°) Recopier et compléter la phrase : « Les valeurs possibles de q sont ….» (on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule). Répondre sans justifier.

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

3°) Conclure en recopiant et complétant la phrase : « Les entiers naturels vérifiant la condition (C) sont ………. »
(on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule).

……………………………………………………………………………………………………..……………………

……………………………………………………………………………………………………..……………………

IV. (2 points)

Les phrases suivantes permettent de démontrer que pour tout entier relatif n impair le nombre n^2-1 est un multiple de 8.

① k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs.
② Or le produit d'un entier pair par un entier quelconque est pair.
③ On a $n^2-1=4k(k+1)$.
④ Ainsi $n^2-1=8p$.
⑤ On en déduit que $k(k+1)$ est pair.
⑥ n est impair donc n s'écrit sous la forme $2k+1$ avec k entier relatif.
⑦ On peut donc écrire $k(k+1)=2p$ avec p entier naturel.
⑧ Donc l'un de ces deux entiers est pair.
⑨ On en déduit que n^2-1 est un multiple de 8.
⑩ Soit n un entier naturel impair fixé.

Remettre les phrases dans l'ordre.

………………………………………………………………………………………………… (écrire les numéros)

V. (5 points : 1°) 2 points + 2 points ; 2°) 1 point)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Cette hypothèse est valable pour les deux questions.

1°) Expliquer pourquoi la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$ est possible. On attend une seule phrase.

……

……

Vérifier au brouillon que l'on a $3n+1=2(n+2)+(n-3)\quad(1)$.

Quelles inégalités permettent d'affirmer que l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$?
On attend deux inégalités.

…………………………………………… ……………………………………………

Écrire alors une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Dans la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

……

……

2°) Cette question est indépendante de la question 1°). On suppose toujours que $n \geqslant 3$.

Expliquer pourquoi la division euclidienne de $3n+1$ par $n-2$ est possible. On attend une seule phrase.

……

……

L'égalité $3n+1=2(n-2)+n+5\quad(2)$ traduit-elle la division euclidienne de $3n+1$ par $n-2$? Pourquoi ?

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 19-10-2017

I.

1°) Écrire sans justifier l'égalité de la division euclidienne de – 2017 par 10 puis compléter la phrase ci-dessous.

$$-2017 = 10 \times (-202) + 3$$

Dans la division euclidienne – 2017 par 10, le quotient est égal à – 202 et le reste est égal à 3.

2°) Écrire l'égalité de la division euclidienne de – 10 par 2017 puis compléter la phrase ci-dessous.

$$-10 = 2017 \times (-1) + 2007$$

Dans la division euclidienne – 10 par 2017, le quotient est égal à – 1 et le reste est égal à 2007.

II.

Les deux questions de l'exercice sont indépendantes.

1°) Soit x un entier relatif $\boxed{\text{pair}}$. On effectue la division euclidienne de x par 6.

Quelles sont les valeurs possibles du reste ? Répondre en écrivant les valeurs séparées par une virgule sans égalités.

0 ; 2 ; 4

2°) Déterminer le nombre d'entiers relatifs x vérifiant les conditions suivantes
(C_1) : Le reste de la division euclidienne de x par 6 est égal à 1.
(C_2) : $-2017 \leqslant x \leqslant 2017$.
On ne suppose pas que x est pair.

Écrire la réponse ci-dessous sans égalité et détailler la démarche sur les lignes ci-contre.

673

Pour la démarche à écrire sur les lignes ci-contre, on commencera en écrivant :
« Soit x un entier relatif vérifiant les conditions (C_1) et (C_2).
On note q le quotient de la division euclidienne de x par 6 ».

Soit x un entier relatif vérifiant les conditions (C_1) et (C_2).
On note q le quotient de la division euclidienne de x par 6.

On a donc $x = 6q + 1$.

$(C_2) \Leftrightarrow -2027 \leqslant 6q + 1 \leqslant 2017$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2018}{6} \leqslant q \leqslant \dfrac{2016}{6}$

$\Leftrightarrow -336 \leqslant q \leqslant 336$ car $-\dfrac{2018}{6} = -336,3\underline{3}...$ et $\dfrac{2016}{6} = 336$

On calcule le nombre d'entiers relatifs compris entre – 336 et 336, ces deux valeurs étant comprises.

On effectue donc le calcul $336 - (-336) + 1 = 673$.

Il y a donc 673 entiers relatifs vérifiant les condition (C_1) et (C_2).

III.

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers naturels n vérifiant la condition
(C) : « La division euclidienne de n par 43 donne un reste égal au cube du quotient ».

Dans les questions 1°) et 2°), on considère un entier naturel n vérifiant la condition (C) et on note q le quotient de la division euclidienne de n par 43. On sait que q est un entier naturel.

1°) Exprimer n en fonction de q et écrire une inégalité vérifiée par q. Répondre sans justifier.

$n = 43q + q^3$ $\qquad$ $q^3 < 43$

2°) Recopier et compléter la phrase : « Les valeurs possibles de q sont ….» (on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule). Répondre sans justifier.

Les valeurs possibles de q sont 0, 1, 2, 3.

> En effet, $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$.
> Il n'y a pas besoin d'utiliser la racine cubique c'est-à-dire d'écrire $q < \sqrt[3]{43}$. Mieux vaut privilégier une méthode simple sans calculatrice.

3°) Conclure en recopiant et complétant la phrase : « Les entiers naturels vérifiant la condition (C) sont ………. » (on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule).

Les entiers naturels vérifiant la condition (C) sont 0, 44, 94, 156.

IV.

Les phrases suivantes permettent de démontrer que pour tout entier relatif n impair le nombre n^2-1 est un multiple de 8.

① k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs.
② Or le produit d'un entier pair par un entier quelconque est pair.
③ On a $n^2-1=4k(k+1)$.
④ Ainsi $n^2-1=8p$.
⑤ On en déduit que $k(k+1)$ est pair.
⑥ n est impair donc n s'écrit sous la forme $2k+1$ avec k entier relatif.
⑦ On peut donc écrire $k(k+1)=2p$ avec p entier naturel.
⑧ Donc l'un de ces deux entiers est pair.
⑨ On en déduit que n^2-1 est un multiple de 8.
⑩ Soit n un entier naturel impair fixé.

Remettre les phrases dans l'ordre.

⑩ ⑥ ③ ① ⑧ ② ⑤ ⑦ ④ ⑨

V.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Cette hypothèse est valable pour les deux questions.

1°) Expliquer pourquoi la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$ est possible. On attend une seule phrase.

On peut effectuer la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$ car les deux conditions suivantes sont vérifiées
(C_1) : $3n+1$ et $n+2$ sont des entiers ;
(C_2) : $n+2$ est non nul (le diviseur est non nul).

Chacune des conditions était sur 1 point.

Vérifier au brouillon que l'on a $3n+1=2(n+2)+(n-3)$ (1).

Quelles inégalités permettent d'affirmer que l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$?
On attend deux inégalités.

$n-3<n+2$ $\qquad\qquad$ $n-3\geqslant 0$

La deuxième inégalité vient du fait que $n\geqslant 3$ par hypothèse.

Écrire alors une phrase sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Dans la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

Dans la division euclidienne de $3n+1$ par $n+2$, le quotient est égal à 2 et le reste est égal à $n-3$.

2°) Cette question est indépendante de la question 1°). On suppose toujours que $n\geqslant 3$.

Expliquer pourquoi la division euclidienne de $3n+1$ par $n-2$ est possible. On attend une seule phrase.

On peut effectuer la division euclidienne de $3n+1$ par $n-2$ car ce sont des entiers et $n-2$ est non nul (puisque $n\geqslant 3$ par hypothèse).

L'égalité $3n+1=2(n-2)+n+5$ (2) traduit-elle la division euclidienne de $3n+1$ par $n-2$? Pourquoi ?

(2) ne traduit pas la division euclidienne de $3n+1$ par $n-2$ car $n+5\geqslant n-2$.

N. B. : On peut écrire $3n+1=3(n-2)+7$. Cette égalité traduit la division euclidienne de $3n+1$ par $n-2$ lorsque $7<n-2$ c'est-à-dire lorsque $n\geqslant 10$.
On peut éventuellement trouver cette égalité après recherche sur calculatrice (commande « reste » ou utilisation de la partie entière).