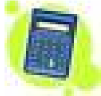
TS2 spécialité

Contrôle du mercredi 18 octobre 2017 (50 minutes)



Prénom et nom : ………………………………………………………

Note : ……../ 20

• L'usage du symbole d'équivalence est interdit pour ce contrôle.

• À l'exception de l'exercice **IV**, il est demandé de ne pas introduire de nouvelles lettres en dehors de celles utilisées dans l'énoncé.

I. (10 points)

Dans cet exercice, on s'intéresse aux entiers relatifs x vérifiant la condition (C) : « Le reste de la division euclidienne de x par 8 est 6 ».
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

Soit x un entier relatif quelconque vérifiant la condition (C).
On note q le quotient de la division euclidienne de x par 8. On a donc $q \in \mathbb{Z}$ et $x = 8q + 6$.
Pour chaque question, on attend une justification précise.

1°) En observant que $x = 4 \times (2q+1) + 2$ (1), déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de x par 4.
On conclura par la phrase suivante à compléter : « Dans la division euclidienne de x par 4, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Vérifier au brouillon que $x^2 = 8 \times (8q^2 + 12q + 4) + 4$ (2). En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de x^2 par 8.
On rédigera une phrase sur le même modèle qu'à la question précédente.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) En s'inspirant de la question précédente, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $10x$ par 8.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $-x$ par 8.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Partie B (2 points)

Combien y a-t-il d'entiers relatifs x vérifiant la condition (C) tels que $-2017 \leqslant x \leqslant 2017$?
Écrire la réponse ci-dessous sans égalité et détailler la démarche sur les lignes au verso.

………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers *n* strictement négatifs vérifiant la condition (C) : « La division euclidienne de *n* par 43 donne un reste égal au carré du quotient ».

Dans les questions 1°) et 2°), on note *q* le quotient d'un entier *n* strictement négatif vérifiant la condition (C).

1°) Exprimer *n* en fonction de *q* et écrire une inégalité vérifiée par *q*.

………………………………………… …………………………………………

2°) Recopier et compléter la phrase : « Les valeurs possibles de *q* sont ….» (on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule).

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

3°) Conclure en recopiant et complétant la phrase : « Les entiers strictement négatifs vérifiant la condition (C) sont ………. » (on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule).

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Pour tout entier naturel *n*, on pose $\mathrm{A}(n)=2n^3+5n^2+n+16$.

1°) Recopier l'égalité suivante en remplaçant les pointillés dans la parenthèse par une expression en fonction de *n* :
$\mathrm{A}(n)=(2n+1)\times(\text{.........})+n+17 \qquad (1)$.

………………………………………………………………………………………………………

2°) Le but de cette question est de déterminer pour quelles valeurs de *n* l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $\mathrm{A}(n)$ par $2n+1$.

On observe que …………………………..…… et …………………………..…… sont des entiers naturels.

Donc (1) traduit la division euclidienne lorsque …………………………………… c'est-à-dire ……………….. .

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Pour tout entier relatif *k*, on pose $\mathrm{A}(k)=k^2+k$.
Remettre les phrases ci-dessous dans l'ordre permettant d'établir la démonstration de la parité de $\mathrm{A}(k)$.

① k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs.
③ On a $\mathrm{A}(k)=k(k+1)$.
⑤ On en déduit que $\mathrm{A}(k)$ est pair.
② Or le produit d'un entier pair par un entier quelconque est pair.
④ Donc l'un de ces deux entiers est pair.
⑥ Soit *k* un entier relatif fixé.

……………………………………………………………………………………. (écrire les numéros)

2°) Démontrer que pour tout entier relatif *n* impair n^2-1 est un multiple de 8.
On commencera ainsi la rédaction : « Soit *n* un entier relatif impair quelconque. Comme *n* est impair, *n* s'écrit sous la forme ….. ».

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

……………………………………………………………………………………………………..…………………..

Conseils donnés à l'oral

I.

Partie A

1°) $\boxed{\text{sans calcul}}$

Corrigé du contrôle du 18-10-2017

I.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux entiers relatifs x vérifiant la condition (C) : « Le reste de la division euclidienne de x par 8 est 6 ».
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit x un entier relatif quelconque vérifiant la condition (C).
On note q le quotient de la division euclidienne de x par 8. On a donc $q \in \mathbb{Z}$ et $x = 8q + 6$.
Pour chaque question, on attend une justification précise.

1°) En observant que $x = 4 \times (2q + 1) + 2 \ \ (1)$, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de x par 4.
On conclura par la phrase suivante à compléter : « Dans la division euclidienne de x par 4, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

On répond à cette question sans faire de calcul. Il est de même pour les autres questions de la partie A.

$2q+1$ et 2 sont des entiers naturels.

De plus, $2 < 8$.

Donc l'égalité (1) traduit la division euclidienne de x par 4.

Dans la division euclidienne de x par 4, le quotient est égal à $2q+1$ et le reste est égal à 2.

2°) Vérifier au brouillon que $x^2 = 8 \times (8q^2 + 12q + 4) + 4 \ \ (2)$. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de x^2 par 8.
On rédigera une phrase sur le même modèle qu'à la question précédente.

$8q^2 + 8q + 4$ et 4 sont des entiers naturels.

De plus, $4 < 8$.

Donc l'égalité (1) traduit la division euclidienne de x^2 par 8.

Dans la division euclidienne de x^2 par 8, le quotient est égal à $8q^2 + 8q + 4$ et le reste est égal à 4.

3°) En s'inspirant de la question précédente, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $10x$ par 8.

On a $10x = 40 \times (2q+1) + 20$ ce qui s'écrit aussi $10x = 8 \times (10q + 7) + 4$.

$10q + 7$ et 4 sont des entiers naturels.

De plus, $4 < 8$.

Donc l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $10x$ par 8.

Dans la division euclidienne de $10x$ par 8, le quotient est égal à $10q + 7$ et le reste est égal à 4.
4°) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $-x$ par 8.

On a $-x = -8q - 6$ ce qui s'écrit aussi $-x = 8 \times (-q - 1) + 2$.

$-q-1$ est un entier relatif et 2 est un entier naturel.

De plus, $2 < 8$.

Donc l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $-x$ par 8.

Dans la division euclidienne de $-x$ par 8, le quotient est égal à $-q-1$ et le reste est égal à 2

Partie B

Combien y a-t-il d'entiers relatifs x vérifiant la condition (C) tels que $-2017 \leqslant x \leqslant 2017$?
Écrire la réponse ci-dessous sans égalité et détailler la démarche sur les lignes au verso.

504

On cherche les valeurs de q telles que $-2017 \leqslant 8q + 6 \leqslant 2017 \quad (\alpha)$.

$$(\alpha) \Leftrightarrow -2023 \leqslant 8q \leqslant 2011$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2023}{8} \leqslant q \leqslant \frac{2011}{8}$$

$$\Leftrightarrow -252{,}875 \leqslant q \leqslant 251{,}375$$

$$\Leftrightarrow -252 \leqslant q \leqslant 251$$

On calcule le nombre d'entiers relatifs compris entre – 252 et 251, ces deux valeurs étant comprises.

On effectue donc le calcul $251 - (-252) + 1 = 504$ (formule du cours).

II.

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers n strictement négatifs vérifiant la condition (C) : « La division euclidienne de n par 43 donne un reste égal au carré du quotient ».
Dans les questions 1°) et 2°), on note q le quotient d'un entier n strictement négatif vérifiant la condition (C).

1°) Exprimer n en fonction de q et écrire une inégalité vérifiée par q.

$n = 43q + q^2$ $\qquad\qquad$ $q^2 < 43$

2°) Recopier et compléter la phrase : « Les valeurs possibles de q sont ….» (on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule).

Les valeurs possibles de q sont 0, – 1, – 2, – 3, – 4, – 5, – 6.
On connaît la liste des carrés parfaits : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64…

Les carrés parfaits strictement inférieurs à 43 sont 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36.

Comme n est strictement négatif, q est aussi strictement négatif.

3°) Conclure en recopiant et complétant la phrase : « Les entiers strictement négatifs vérifiant la condition (C) sont ………. » (on écrira les valeurs sans égalités séparées par une virgule).

Les entiers strictement négatifs vérifiant la condition (C) sont – 42, – 82, – 120, – 156, – 190, – 222.

On ne retient pas la valeur 0 pour q car celle-ci donne $n=0$. Or $n<0$.

III.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{A}(n)=2n^3+5n^2+n+16$.

1°) Recopier l'égalité suivante en remplaçant les pointillés dans la parenthèse par une expression en fonction de n :
$\mathrm{A}(n)=(2n+1)\times(.........)+n+17 \qquad (1)$.

$$\mathrm{A}(n)=(2n+1)\times\left(n^2+2n-1\right)+n+17$$

2°) Le but de cette question est de déterminer pour quelles valeurs de n l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $\mathrm{A}(n)$ par $2n+1$.

On observe que n^2+2n-1 et $n+17$ sont des entiers naturels.

Donc (1) traduit la division euclidienne lorsque $n+17<2n+1$ c'est-à-dire $n>16$.

IV.

1°) Pour tout entier relatif k, on pose $\mathrm{A}(k)=k^2+k$.
Remettre les phrases ci-dessous dans l'ordre permettant d'établir la démonstration de la parité de $\mathrm{A}(k)$.

① k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs.	② Or le produit d'un entier pair par un entier quelconque est pair.
③ On a $\mathrm{A}(k)=k(k+1)$.	④ Donc l'un de ces deux entiers est pair.
⑤ On en déduit que $\mathrm{A}(k)$ est pair.	⑥ Soit k un entier relatif fixé.

⑥ ③ ① ④ ② ⑤ (écrire les numéros)

On peut éventuellement échanger ③ et ① mais c'est moins logique donc moins bien.

⑥ ① ③ ④ ② ⑤ (écrire les numéros)

2°) Démontrer que pour tout entier relatif n impair n^2-1 est un multiple de 8.
On commencera ainsi la rédaction : « Soit n un entier relatif impair quelconque. Comme n est impair, n s'écrit sous la forme ….. ».

Soit n un entier relatif impair quelconque.

Comme n est impair, n s'écrit sous la forme $2k+1$ avec k entier naturel.

$n^2-1=4k^2+4k=4\mathrm{A}(k)$

D'après la question 1°), $\mathrm{A}(k)$ est un nombre pair donc $\mathrm{A}(k)=2p$ où p est un entier naturel.

Par suite, $n^2-1=8p$.

On en déduit que n^2-1 est un multiple de 8.