$1^{\text{ère}}$ **S1**

Contrôle du vendredi 20 octobre 2017
(50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x \leqslant x\sqrt{3}-1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

……

……

……

……

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 =$ ……………………………………………………………

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2-x} \leqslant 3$ (2).

$\sqrt{2-x}$ existe si et seulement si …………… (écrire une condition sur *x*).

On résout (2) dans l'intervalle ……………………………. .

(2) est successivement équivalente à :

……

……

……

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 =$ ……………………………………………………………

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère une fonction *f* définie et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On précise que $f(0) = -\dfrac{1}{3}$ et que $f(2) = 0$. On considère la fonction *g* définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition de *g* ?

…………………………………………………….. (une seule réponse, sans égalité)

2°) Dresser sans justifier le tableau de signes de *f*.

3°) Dresser sans justifier le tableau de variations de *g*. Faire les flèches de variations à la règle.

III. (3 points)

Soit *a* et *b* deux réels.

Compléter les lignes ci-dessous dont le but est de résoudre le système $(\mathrm{I})\ \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

Le déterminant du système (I) est égal à …….. .

Comme il est non nul, (I) admet ………………………………………………………. .

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \quad \begin{array}{|l|l} \times & \times \\ \times & \times \end{array}$$

$\downarrow$ pour annuler les *y* $\quad$ $\downarrow$ pour annuler les *x*

$\begin{cases} \text{…………….} = \text{…………….} \\ \text{…………….} = \text{…………….} \end{cases}$ $\quad$ $(\leftarrow$ ligne avec $x)$ / $(\leftarrow$ ligne avec $y)$

$\begin{cases} \text{…………….} = \text{…………….} \\ \text{…………….} = \text{…………….} \end{cases}$ $\quad$ (égalité du type $x = \ldots$ en fonction de a et b) / (égalité du type $y = \ldots$ en fonction de a et b)

Le couple solution du système (I) est …………………………...…… .

Rappel : Un couple se note entre parenthèses. On attend donc une réponse du type $(\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots)$.

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère le polynôme $P_m(x) = mx^2 + (2m-1)x + m - 2$ où m est un réel non nul.
Les coefficients de ce polynôme sont $a = m$ (coefficient de x^2), $b = 2m-1$ (coefficient de x), $c = m-2$.

1°) Compléter les phrases suivantes sans justifier.

• Les racines de $P_{\frac{1}{2}}(x)$ sont ………………………………… .

• Les racines de $P_2(x)$ sont ………………………………… .

2°) Calculer le discriminant Δ de $P_m(x)$ en fonction de m. Écrire le détail du calcul sur les lignes ci-dessous.

$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (un seul résultat sous forme développée)

……...

……...

……...

3°) Compléter les phrases suivantes :

• Si $m = \ldots\ldots$, $P_m(x)$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

• Si $m \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $P_m(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

• Si $m \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $P_m(x)$ n'admet aucune dans $\mathbb{R}$.

4°) On se place dans le cas où $P_m(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.
Écrire les expressions de ces racines en fonction de m sur la ligne ci-dessous (sans égalités, uniquement séparées par une virgule).

……

V. (1 point)

On considère le polynôme $P(x) = \left(1-\sqrt{3}\right)x^2 - 2x\sqrt{3} + \left(1+\sqrt{3}\right)$.

Calculer le discriminant réduit Δ' de $P(x)$. Écrire le détail du calcul sur les lignes ci-dessous.

$\Delta' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (un seul résultat sous forme développée)

……...

……...

……...

VI. (1 point)

On rappelle la propriété du cours suivante :

> Soit I un intervalle non vide et non réduit à un singleton de $\mathbb{R}$.
> Soit u une fonction définie sur I vérifiant les conditions suivantes :
> C_1 : u est croissante sur I ;
> C_2 : $\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) \geqslant 0$.
> On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.
> Alors f est croissante sur I.

On donne ci-dessous dans le désordre les différents éléments de la démonstration.

① Comme a et b appartiennent à I, d'après C_1 et C_2, $0 \leqslant u(a) \leqslant u(b)$.
② Donc $f(a) \leqslant f(b)$.
③ D'où : $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$ car la fonction « racine carrée » est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
④ On en déduit que f est croissante sur I.
⑤ Soit a et b deux réels quelconques dans I.

Remettre dans les différents éléments dans l'ordre.

……………………………………………………………………………………… (écrire les numéros)

Corrigé du contrôle du 20-10-2017

I.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x \leqslant x\sqrt{3}-1 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$x \leqslant x\sqrt{3}-1$

$x - x\sqrt{3} \leqslant -1$

$x\left(1-\sqrt{3}\right) \leqslant -1$

$\dfrac{x\left(1-\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}} \geqslant -\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ (changement de signe car $1-\sqrt{3}$ est strictement négatif)

$x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

On peut éventuellement s'arrêter là et donner l'ensemble des solutions $S_1 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\,;+\infty\right[$.

On aime cependant mieux transformer l'écriture du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ de manière à ne pas avoir de radical au dénominateur. Pour cela, on utilise la quantité conjuguée.

$x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \left[\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\,;+\infty\right[$

> La résolution de l'inéquation (1) a été globalement très mal réussie.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2-x} \leqslant 3 \quad (2)$.

$\sqrt{2-x}$ existe si et seulement si $x \leqslant 2$ (écrire une condition sur x).

On résout (2) dans l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

(2) est successivement équivalente à :

$2-x \leqslant 9$

$x \geqslant -7$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2 = [-7\,;2]$$

II.

On considère une fonction f définie et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On précise que $f(0) = -\dfrac{1}{3}$ et que $f(2) = 0$. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition de g ?

$[0\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ ou $\mathbb{R}_+ \setminus \{2\}$ (une seule réponse, sans égalité)

x	0	2	$+\infty$
Variations de f		0 ↗	

D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ admet 2 pour unique solution.

$g(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

> Il faut tenir compte du fait que f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2°) Dresser sans justifier le tableau de signes de *f*.

Le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de *x* se déduit des variations de *f* et du fait que $f(2)=0$.
Le mieux est de faire un tableau de variations comme suit. Le signe de *f* apparaît immédiatement.

x	0		2		$+\infty$
Variations de *f*		–	↗ 0	+	

x	0		2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		–	0	+	

Attention à la légende : « Signe de $f(x)$ ».

3°) Dresser sans justifier le tableau de variations de *g*. Faire les flèches de variations à la règle.

x	0		2		$+\infty$
Variations de *g*	-3	↘	‖	↘	

Attention à la légende : « Variations de *g* ».

On calcule l'image de 0 par *g*.

$$g(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-3$$

III.

Soit *a* et *b* deux réels.

Compléter les lignes ci-dessous dont le but est de résoudre le système $(\mathrm{I})\ \begin{cases}x+y=a\\ x-y=b\end{cases}$ d'inconnue $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

Le déterminant du système (I) est égal à – 2.

Beaucoup d'élèves n'ont toujours pas su calculer correctement le déterminant du système. On utilise les coefficients du système.

$$\begin{cases}1x+1y=a\\ 1x-1y=b\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\times(-1)-1\times1=-2$$

Il n'y a pas de *x* et de *y* dans le résultat !

Comme il est non nul, (I) admet un unique couple solution.

$$\begin{cases}x+y=a\\ x-y=b\end{cases}\quad\begin{vmatrix}\times1\\ \times1\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}\times1\\ \times(-1)\end{vmatrix}$$

$\downarrow$ pour annuler les *y* $\qquad\downarrow$ pour annuler les *x*

Le coefficient multiplicateur – 1 doit impérativement être écrit entre parenthèses.
Il est inadmissible d'écrire – 1 sans parenthèses en 1$^{\text{ère}}$.

$$\begin{cases}2x=a+b & (\leftarrow \text{ ligne avec } x)\\ 2y=a-b & (\leftarrow \text{ ligne avec } y)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{a+b}{2} & (\text{égalité du type } x=\ldots \text{ en fonction de } a \text{ et } b)\\ y=\dfrac{a-b}{2} & (\text{égalité du type } y=\ldots \text{ en fonction de } a \text{ et } b)\end{cases}$$

Le couple solution du système (I) est $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{a-b}{2}\right)$.

Cette résolution peut quasiment être effectuée en calcul mental.

Rappel : Un couple se note entre parenthèses. On attend donc une réponse du type $(\ldots\ldots\ldots\,;\ldots\ldots\ldots)$.

IV.

On considère le polynôme $P_m(x)=mx^2+(2m-1)x+m-2$ où m est un réel non nul.

Les coefficients de ce polynôme sont $a=m$ (coefficient de x^2), $b=2m-1$ (coefficient de x), $c=m-2$.

1°) Compléter les phrases suivantes sans justifier.

• Les racines de $P_{\frac{1}{2}}(x)$ sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

• Les racines de $P_2(x)$ sont 0 et $-\dfrac{3}{2}$.

On a : $P_{\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\left(2\times\dfrac{1}{2}-1\right)x+\dfrac{1}{2}-2$ soit $P_{\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}$ ou encore $P_{\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{x^2-3}{2}$.

$P_{\frac{1}{2}}(x)$ est un polynôme incomplet en x.

L'équation $P_{\frac{1}{2}}(x)=0$ est successivement équivalente à :

$x^2-3=0$

$x^2=3$

$x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

Les racines de $P_{\frac{1}{2}}(x)$ s'obtiennent par résolution immédiate de l'équation $P_{\frac{1}{2}}(x)=0$ (de tête, sans discriminant).

On a : $P_2(x)=2x^2+3x$. $P_2(x)$ est un polynôme incomplet (pas de terme constant).

Les racines de $P_2(x)$ s'obtiennent par résolution immédiate de l'équation $P_{\frac{1}{2}}(x)=0$ (de tête, sans discriminant).

L'équation $P_2(x)=0$ est successivement équivalente à :

$2x^2+3x=0$

$x(2x+3)=0$ (équation produit nul)

$x=0$ ou $2x+3=0$

$x=0$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$

2°) Calculer le discriminant Δ de $P_m(x)$ en fonction de m. Écrire le détail du calcul sur les lignes ci-dessous.

$\Delta=4m+1$ (un seul résultat sous forme développée)

$\Delta=(2m-1)^2-4m(m-2)$ (attention, les parenthèses autour de $m-2$ sont obligatoires)

$=(4m^2-4m+1)-4m^2+8m$

$=\cancel{4m^2}-4m+1\cancel{-4m^2}+8m$

$=4m+1$

3°) Compléter les phrases suivantes :

• On se réfère au signe de $4m+1$.

• Pour le deuxième cas, il ne faut pas oublier que $m\neq 0$ par hypothèse.

• Si $m=-\dfrac{1}{4}$, $P_m(x)$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

• Si $m\in\left]-\dfrac{1}{4};0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$, $P_m(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

• Si $m\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{4}\right[$, $P_m(x)$ n'admet aucune dans $\mathbb{R}$.

4°) On se place dans le cas où $P_m(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

Écrire les expressions de ces racines en fonction de m sur la ligne ci-dessous (sans égalités, uniquement séparées par une virgule).

$$\frac{1-2m+\sqrt{4m+1}}{2m}\ ;\ \frac{1-2m-\sqrt{4m+1}}{2m}$$

Il n'est pas possible d'aller plus loin. On ne peut pas simplifier l'expression des racines.

V.

On considère le polynôme $P(x)=\left(1-\sqrt{3}\right)x^2-2x\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Calculer le discriminant réduit Δ' de $P(x)$. Écrire le détail du calcul sur les lignes ci-dessous.

$\Delta'=5$ (un seul résultat sous forme développée)

On commence par identifier clairement les coefficients du polynôme.

$P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=1-\sqrt{3}$, $b=-2\sqrt{3}$, $c=1+\sqrt{3}$.

On pose $b'=\dfrac{b}{2}=-\sqrt{3}$.

$\Delta'=\left(-\sqrt{3}\right)^2-\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$ (attention à bien écrire $-\sqrt{3}$ entre parenthèses ainsi que $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$)

$=3-(1-3)$

$=5$

• Le calcul a posé problème à beaucoup d'élèves. J'ai trouvé de nombreux résultats faux.

• Je rappelle qu'un discriminant ne peut dépendre de x.

VI.

On rappelle la propriété du cours suivante :

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un singleton de $\mathbb{R}$.
Soit u une fonction définie sur I vérifiant les conditions suivantes :
C_1 : u est croissante sur I ;
C_2 : $\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) \geqslant 0$.
On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.
Alors f est croissante sur I.

On donne ci-dessous dans le désordre les différents éléments de la démonstration.

① Comme a et b appartiennent à I, d'après C_1 et C_2, $0 \leqslant u(a) \leqslant u(b)$.
② Donc $f(a) \leqslant f(b)$.
③ D'où : $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$ car la fonction « racine carrée » est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
④ On en déduit que f est croissante sur I.
⑤ Soit a et b deux réels quelconques dans I.

Remettre dans les différents éléments dans l'ordre.

⑤ ① ③ ② ④ (écrire les numéros)