Méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice

I. Opérations élémentaires sur les matrices

Elles « marchent » pour des matrices rectangulaires ou carrées.

1°) Opérations sur les lignes

a) échange de deux lignes (codage : $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$)

b) multiplication d'une ligne par un réel non nul (codage : $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$)

c) ajout d'une ligne à une autre ligne (codage : $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \mathrm{L}_j$)

2°) Opérations sur les colonnes

Même chose.

II. Exemples d'inversion d'une matrice carrée d'ordre 3

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour inverser la matrice A, on va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes qui ramènent à l'identité.

On effectue « en miroir » les mêmes opérations élémentaires sur la matrice identité (algorithme de Dorian Gray).

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\ L_2\leftarrow L_2-2L_1\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&2\\0&0&3\end{pmatrix}\ L_3\leftarrow L_3+L_2\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ L_2\leftarrow L_2-\frac{2}{3}L_3\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ L_1\leftarrow L_1+L_2\qquad\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ \begin{matrix}L_2\leftarrow -L_2\\L_3\leftarrow \frac{1}{3}L_3\end{matrix}\qquad\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

III. Bilan de la méthode

On utilise la méthode pour inverser des matrices carrées (la notion d'inverse de matrice ne marche que pour les matrices carrées).

On se ramène tout d'abord à une matrice triangulaire supérieure.

On utilise des pivots dans chaque colonne.

Si on ne trouve pas de pivot, on effectue un échange de deux lignes.

Intérêt de la méthode : l'algorithme peut se programmer aisément.

1$^{\text{er}}$ temps : on se ramène à une matrice triangulaire supérieure.

2$^{\text{e}}$ temps : on se ramène à une matrice diagonale en remontant par le bas (le « nettoyage »).

3$^{\text{e}}$ temps : on se ramène à l'identité.

Cela constituerait la trame de la trame.

Sur calculatrice TI, appuyer sur la touche $\boxed{\text{matrice}}$, puis choisir MATH.
Descendre tout en bas et choisir Gauss ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{matrice}}$ pour mettre le nom) $\boxed{\text{entrer}}$.