TS spé

Devoir pour le lundi 6 novembre 2017

Le but du devoir est d'étudier l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$.

Partie 1

1°) Démontrer que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors nécessairement x est un nombre impair et y est un nombre pair.

2°) Justifier que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

Partie 2

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ ainsi que par les relations de récurrence $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$.

On admettra que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des entiers naturels et que $x_n \geqslant 1$ pour tout entier naturel n, autrement dit que $(x_n\,;\,y_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ pour tout entier naturel n.
Ce résultat se démontre aisément par récurrence.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $x_n^{\,2} - 2y_n^{\,2} = 1$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_n < x_{n+1}$. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de solutions.

3°) Déterminer un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

Corrigé du DM pour le 6-11-2017

Le but du devoir est d'étudier l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$.

> Il s'agit d'une équation de Pell-Fermat du nom de Pierre de Fermat (1601 ou 1607- 12 janvier 1665), magistrat, savant et mathématicien français, et de John Pell (1er mars 1611 -12 décembre 1685), diplomate et mathématicien anglais.

> On appelle équation de Pell-Fermat une équation du type $x^2 - n^2y^2 = m$ d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$ où m est égal à 1 ou – 1 et n un entier naturel non nul.

Partie 1

1°) Démontrer que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors nécessairement x est un nombre impair et y est un nombre pair.

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

• Démontrons que x est un nombre impair.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x^2 = 2y^2 + 1$.

$2y^2$ est un multiple de 2 donc $2y^2$ est pair d'où $2y^2 + 1$ est impair.

Or pour tout entier relatif n, n^2 a la même parité que n.

Donc x^2 étant impair, x est impair.

• Démontrons que y est un nombre pair.

1ère méthode :

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 2y^2 = (x-1)(x+1)$

x étant impair, $x-1$ et $x+1$ sont pairs.

$x-1$ et $x+1$ sont donc chacun divisibles par 2.

Par suite, le produit $(x-1)(x+1)$ est divisible par 4.
$2y^2$ est donc divisible par 4 d'où y^2 est divisible par 2 ce qui signifie que y^2 est pair.
Or y et y^2 ont la même parité donc y est pair.

2e méthode :

On a démontré que x est impair donc il existe un entier naturel k tel que $x = 2k + 1$.

On a alors $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

Comme $(x\,;\,y)$ est solution de (E), on a $4k^2 + 4k = 2y^2$ ce qui donne $y^2 = 2k^2 + 2k$ ou encore $y^2 = 2(k^2 + k)$.

y^2 est donc pair et par conséquent, y est pair.

2°) Justifier que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

1ère méthode :

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

On a alors $x \times x + (-2y) \times y = 1$.

Puisque x et $-2y$ sont des entiers relatifs, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ux + vy = 1$.

On en déduit que x et y sont premiers entre eux.

2e méthode :

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

Soit d un diviseur positif commun à x et y.

d divise x donc d divise x^2.

d divise y donc d divise $2y^2$.

Donc d divise la différence $x^2 - 2y^2$ ce qui équivaut à d divise 1 d'où $d = 1$.

Ainsi, le seul diviseur positif commun à x et y est 1 donc x et y sont premiers entre eux.

Donc si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

Partie 2

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ ainsi que par les relations de récurrence $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$.

On admettra que pour tout entier naturel *n*, x_n et y_n sont des entiers naturels et que $x_n \geqslant 1$ pour tout entier naturel *n*, autrement dit que $(x_n\,;\,y_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ pour tout entier naturel *n*.
Ce résultat se démontre aisément par récurrence.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $x_n^{\,2} - 2y_n^{\,2} = 1$.

Pour *n* entier naturel, on définit la phrase $P(n)$: « $x_n^{\,2} - 2y_n^{\,2} = 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$x_0^{\,2} - 2y_0^{\,2} = 1^2 - 2\times 0^2 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $x_k^{\,2} - 2y_k^{\,2} = 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $x_{k+1}^{\,2} - 2y_{k+1}^{\,2} = 1$.

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{\,2} - 2y_{k+1}^{\,2} &= (3x_k + 4y_k)^2 - 2(2x_k + 3y_k)^2 \\ &= (3x_k + 4y_k)^2 - 2(2x_k + 3y_k)^2 = 9x_k^{\,2} + 24x_k y_k + 16y_k^{\,2} - 8x_k^{\,2} - 24x_k y_k - 18y_k^{\,2} \\ &= x_k^{\,2} - 2y_k^{\,2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le théorème de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel *n*, la phrase $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que pour tout entier naturel *n*, $x_n^{\,2} - 2y_n^{\,2} = 1$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $x_n < x_{n+1}$. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de solutions.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n &= 3x_n + 4y_n - x_n \\ &= 2x_n + 4y_n \end{aligned}$$

Or $x_n > 0$ et $y_n \geqslant 0$ puisque l'on a admis que pour tout entier naturel *n*, $(x_n\,;\,y_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2x_n + 4y_n > 0$ ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n > 0$ et par conséquent $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < x_{n+1}$.

D'après le résultat admis, pour tout entier naturel *n*, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est formé d'entiers naturels et d'après la question précédente $x_n^{\,2} - 2y_n^{\,2} = 1$.
On en déduit que tous les couples $(x_n\,;\,y_n)$ où *n* est un entier naturel sont solutions de (E).
Ces couples sont deux à deux distincts d'après le résultat que l'on vient de démontrer.
Ils constituent donc une infinité de couples solutions pour l'équation (E).

3°) Déterminer un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

1ère méthode :

On calcule tous les termes des suites (x_n) et (y_n) jusqu'à trouver un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017.

$x_0 = 1$	$y_0 = 0$
$x_1 = 3x_0 + 4y_0$ $= 3\times1 + 4\times0$ $= 3$	$y_1 = 3x_0 + 3y_0$ $= 2\times1 + 3\times0$ $= 2$
$x_2 = 3x_1 + 4y_1$ $= 3\times3 + 4\times2$ $= 17$	$y_2 = 2x_1 + 3y_1$ $= 2\times3 + 3\times2$ $= 12$
$x_3 = 3x_2 + 4y_2$ $= 3\times17 + 4\times12$ $= 99$	$y_3 = 2x_2 + 3y_2$ $= 2\times17 + 3\times12$ $= 70$
$x_4 = 3x_3 + 4y_3$ $= 3\times99 + 4\times70$ $= 577$	$y_4 = 2x_3 + 3y_3$ $= 2\times99 + 3\times70$ $= 408$
$x_5 = 3x_4 + 4y_4$ $= 3\times577 + 4\times408$ $= 3363$	$y_5 = 2x_4 + 3y_4$ $= 2\times577 + 3\times408$ $= 2378$

On peut aussi rentrer les suites dans la calculatrice.

On vérifie immédiatement tout de même.

2e méthode :

On rentre dans la calculatrice le programme correspondant à l'un des deux algorithmes suivants.

Entrée :
X prend la valeur 1
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $Y < 2017$ **Faire**
    A prend la valeur $3X + 4Y$
    Y prend la valeur $2X + 3Y$
    X prend la valeur A
FinTantque

Sortie :
Afficher X
Afficher Y

Entrée :
X prend la valeur 1
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $Y < 2017$ **Faire**
    Y prend la valeur $2X + 3Y$
    X prend la valeur $\sqrt{2Y^2 + 1}$
FinTantque

Sortie :
Afficher X
Afficher Y

Le programme affiche en sortie $X = 3363$ et $Y = 2378$.

On effectue une vérification. On remplace avec les valeurs de X et Y dans (E).

$3363^2 - 2 \times 2378^2 = 11309\ 769 - 2 \times 5654\ 884$

De plus, on a bien X impair et Y pair.

Donc $(3363\,;2378)$ est un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

On peut démontrer que les couples $(x_n\,;y_n)$ sont les seuls couples formés d'entiers naturels solutions de (E).

Fin du corrigé

Version originale du DM

La version que je propose est celle remaniée en juillet 2018.

Le but du devoir est d'étudier l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$.

Partie 1

1°) Démontrer que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors nécessairement *x* est un nombre impair et *y* est un nombre pair.

2°) Justifier que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors *x* et *y* sont premiers entre eux.

Partie 2

1°) Soit *x* et *y* deux entiers naturels. On pose $x' = 3x + 4y$ et $y' = 2x + 3y$.
Démontrer que si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors $(x'\,;\,y')$ est aussi solution de (E).

2°) On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ ainsi que par les relations de récurrence $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$.

On admettra que pour tout entier naturel *n*, x_n et y_n sont des entiers naturels et que $x_n \geqslant 1$ pour tout entier naturel *n*, autrement dit que $(x_n\,;\,y_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ pour tout entier naturel *n*.
Ce résultat se démontre aisément par récurrence.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

b) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $x_n < x_{n+1}$. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de solutions.

3°) Déterminer un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

Corrigé du DM pour le 6-11-2017

Le but du devoir est d'étudier l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$.

> Il s'agit d'une équation de Pell-Fermat du nom de Pierre de Fermat (1601 ou 1607- 12 janvier 1665), magistrat, savant et mathématicien français, et de John Pell (1er mars 1611 -12 décembre 1685), diplomate et mathématicien anglais.

> On appelle équation de Pell-Fermat une équation du type $x^2 - n^2y^2 = m$ d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$ où m est égal à 1 ou – 1 et n un entier naturel non nul.

Partie 1

1°) Démontrer que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors nécessairement x est un nombre impair et y est un nombre pair.

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

• Démontrons que x est un nombre impair.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x^2 = 2y^2 + 1$.

$2y^2$ est un multiple de 2 donc $2y^2$ est pair d'où $2y^2 + 1$ est impair.

Or pour tout entier relatif n, n^2 a la même parité que n.

Donc x^2 étant impair, x est impair.

• Démontrons que y est un nombre pair.

1ère méthode :

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 2y^2 = (x-1)(x+1)$

x étant impair, $x-1$ et $x+1$ sont pairs.

$x-1$ et $x+1$ sont donc chacun divisibles par 2.

Par suite, le produit $(x-1)(x+1)$ est divisible par 4.

$2y^2$ est donc divisible par 4 d'où y^2 est divisible par 2 ce qui signifie que y^2 est pair.
Or y et y^2 ont la même parité donc y est pair.

2e méthode :

On a démontré que x est impair donc il existe un entier naturel k tel que $x = 2k+1$.

On a alors $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

Comme $(x\,;\,y)$ est solution de (E), on a $4k^2 + 4k = 2y^2$ ce qui donne $y^2 = 2k^2 + 2k$ ou encore $y^2 = 2\left(k^2 + k\right)$.

y^2 est donc pair et par conséquent, y est pair.

2°) Justifier que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

1ère méthode :

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

On a alors $x \times x + (-2y) \times y = 1$.

Puisque x et $-2y$ sont des entiers relatifs, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ux + vy = 1$.

On en déduit que x et y sont premiers entre eux.

2e méthode :

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

Soit d un diviseur positif commun à x et y.

d divise x donc d divise x^2.

d divise y donc d divise $2y^2$.

Donc d divise la différence $x^2 - 2y^2$ ce qui équivaut à d divise 1 d'où $d = 1$.

Ainsi, le seul diviseur positif commun à x et y est 1 donc x et y sont premiers entre eux.

Donc si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

Partie 2

1°) Soit x et y deux entiers naturels. On pose $x' = 3x + 4y$ et $y' = 2x + 3y$.
Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (E), alors $(x'\,;y')$ est aussi solution de (E).

• Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers naturels quelconques.

$$x'^2 - 2y'^2 = (3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2$$

$$= 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 8x^2 - 24xy - 18y^2$$

$$= x^2 - 2y^2$$

• On suppose à présent que $(x\,;y)$ est solution de (E).

On a donc $x^2 - 2y^2 = 1$. D'après le calcul précédent, on a alors $x'^2 - 2y'^2 = 1$.

Ainsi $(x'\,;y')$ est aussi solution de (E).

2°) On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ ainsi que par les relations de récurrence $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$.
On admettra que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des entiers naturels et que $x_n \geqslant 1$ pour tout entier naturel n, autrement dit que $(x_n\,;y_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ pour tout entier naturel n.
Ce résultat se démontre aisément par récurrence.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E).

On remarque d'abord que d'après le résultat admis, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ est formé d'entiers naturels.

On effectue un raisonnement par récurrence en utilisant le résultat établi à la question précédente.

Pour n entier naturel, on définit la phrase $P(n)$: « $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E) ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

${x_0}^2 - 2{y_0}^2 = 1^2 - 2\times 0^2 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $(x_k\,;y_k)$ est solution de (E).
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $(x_{k+1}\,;y_{k+1})$ est solution de (E).

Comme $(x_k\,;y_k)$ est solution de (E) par hypothèse de récurrence, d'après la question précédente, on peut affirmer sans calcul que $(x_{k+1}\,;y_{k+1})$ est solution de (E).

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le théorème de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel *n*, la phrase $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que pour tout entier naturel *n*, $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

b) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $x_n < x_{n+1}$. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de solutions.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n = 3x_n + 4y_n - x_n$$

$$= 2x_n + 4y_n$$

Or $x_n > 0$ et $y_n \geqslant 0$ puisque l'on a admis que pour tout entier naturel *n*, $(x_n\,;\,y_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2x_n + 4y_n > 0$ ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n > 0$ et par conséquent $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < x_{n+1}$.

Tous les couples $(x_n\,;\,y_n)$ où *n* est un entier naturel sont solutions de (E).

Ces couples sont deux à deux distincts d'après le résultat que l'on vient de démontrer.
Ils constituent donc une infinité de couples solutions pour l'équation (E).

3°) Déterminer un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

1ère méthode :

On calcule tous les termes des suites (x_n) et (y_n) jusqu'à trouver un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017.

$$x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_0 + 4y_0 \\ &= 3\times 1 + 4\times 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 + 4y_1 \\ &= 3\times 3 + 4\times 2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 3x_2 + 4y_2 \\ &= 3\times 17 + 4\times 12 \\ &= 99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 3x_3 + 4y_3 \\ &= 3\times 99 + 4\times 70 \\ &= 577 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 3x_4 + 4y_4 \\ &= 3\times 577 + 4\times 408 \\ &= 3363 \end{aligned}$$

$$y_0 = 0$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_0 + 3y_0 \\ &= 2\times 1 + 3\times 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 2x_1 + 3y_1 \\ &= 2\times 3 + 3\times 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= 2x_2 + 3y_2 \\ &= 2\times 17 + 3\times 12 \\ &= 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 &= 2x_3 + 3y_3 \\ &= 2\times 99 + 3\times 70 \\ &= 408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_5 &= 2x_4 + 3y_4 \\ &= 2\times 577 + 3\times 408 \\ &= 2378 \end{aligned}$$

On peut aussi rentrer les suites dans la calculatrice.

On vérifie immédiatement tout de même.

2e méthode :

On rentre dans la calculatrice le programme correspondant à l'un des deux algorithmes suivants.

Entrée :
X prend la valeur 1
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $Y < 2017$ **Faire**
    A prend la valeur $3X + 4Y$
    Y prend la valeur $2X + 3Y$
    X prend la valeur A
FinTantque

Sortie :
Afficher X
Afficher Y

Entrée :
X prend la valeur 1
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $Y < 2017$ **Faire**
    Y prend la valeur $2X + 3Y$
    X prend la valeur $\sqrt{2Y^2 + 1}$
FinTantque

Sortie :
Afficher X
Afficher Y

Le programme affiche en sortie $X = 3363$ et $Y = 2378$.

On effectue une vérification. On remplace avec les valeurs de X et Y dans (E).

$3363^2 - 2 \times 2378^2 = 11309\ 769 - 2 \times 5654\ 884$

De plus, on a bien X impair et Y pair.

Donc $(3363\,;2378)$ est un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

3e méthode :

On utilise une fonction et la calculatrice (changement de cadre).

On rentre la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 1}$. On règle la table de valeurs en commençant à 2017 avec un pas de 1.

On peut démontrer que les couples $(x_n\,;y_n)$ sont les seuls couples formés d'entiers naturels solutions de (E).