1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 11 octobre 2017 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x^2-1|=|2x|$ (1).
On effectuera la résolution au brouillon.

À un moment de la résolution, on pourra utiliser l'une des applications de la calculatrice permettant de résoudre des équations polynomiales.

On demande uniquement de compléter la phrase suivante en écrivant les valeurs exactes des solutions (sans égalité, uniquement séparées par virgules).

Les solutions de (1) sont ……………………………………………………………………………… .

II. (2 points)

Soit a un réel strictement positif quelconque.
Simplifier l'expression $\text{A}=\dfrac{\sqrt{a^5}-a\sqrt{a}}{a\sqrt{a^3}}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère les expressions $\text{A}(x)=-x^2+2x+1$ et $\text{B}(x)=(x-1)^3-(x+2)(x-3)(x-2)$.

1°) Mettre $\text{A}(x)$ sous forme canonique en écrivant les étapes.

……

……

……

2°) Développer et réduire $\text{B}(x)$.

……

……

……

……

……

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Compléter la phrase suivante par une inégalité du type $x \geqslant$ ... ou $x \leqslant$ ....

$\sqrt{2-x}$ existe si et seulement si …………… .

2°) On considère l'équation $\sqrt{2-x}=3$ (1).
Compléter les lignes suivantes. Pour les pointillés de la première phrase, on attend un intervalle.

Dans l'intervalle ……………., (1) est successivement équivalente à :

……

……

La solution de l'équation (1) est …………………… (sans égalité).

V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{3-|x|}$.

Compléter les équivalences suivantes :

$f(x)$ existe si et seulement si ……………………………………………

si et seulement si ……………………………………………

si et seulement si ……………………………………………

Compléter l'égalité d'ensembles dans la phrase suivante en utilisant les notations correctes.

L'ensemble de définition de f est $\boldsymbol{D}$ = ...

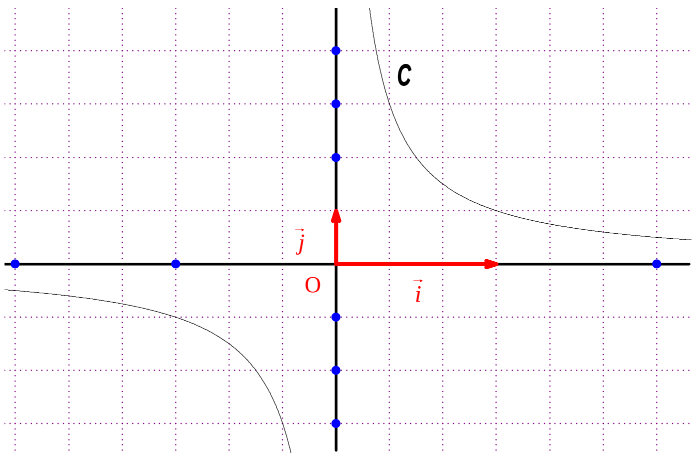
VI. (1 point)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\text{A}(3\,;1)$ et $\text{B}(-2\,;1)$.

Écrire sans justifier un système de conditions traduisant l'appartenance d'un point M de coordonnées $(x\,;y)$ à la demi-droite $[\text{AB})$. **Aide :** Il y a deux lignes car il y a deux conditions (une condition sur *x* et une condition sur *y*).

$$\begin{cases} \text{.....................} \\ \text{.....................} \end{cases}$$

VII. (3 points : 1 point pour le tracé de *D* + 2 points pour la position relative)



Écrire sur le graphique ci-contre l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ sachant que c'est la représentation graphique d'une fonction de référence puis tracer la droite *D* d'équation cartésienne $3x-y+2=0$.

On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* tels que $x_{\text{A}} < x_{\text{B}}$. Marquer ces points sur le graphique.

Compléter les phrases suivantes à l'aide d'intervalles ou de réunions d'intervalles donnant la position de $\mathcal{C}$ par rapport à *D*.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de *D* sur ……………………………… .
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de *D* sur ……………………………… .
- $\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes aux points A et B. *Il n'y a rien à compléter pour cette dernière phrase.*

VIII. (3 points)

Compléter les lignes ci-dessous dont le but est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(\text{I})\begin{cases} x\sqrt{2}+y=2 \\ x+y\sqrt{2}=-1 \end{cases}$.

À la fin, on vérifiera la solution à l'aide de l'application de résolution des systèmes linéaires de la calculatrice.

Le déterminant du système (I) est égal à …….. .

Comme il est non nul, (I) admet ……………………………………………………… .

$$\begin{cases} x\sqrt{2}+y=2 \\ x+y\sqrt{2}=-1 \end{cases} \begin{array}{|l|l} \times & \times \\ \times & \times \end{array}$$

$\downarrow$ pour annuler les *y* $\quad$ $\downarrow$ pour annuler les *x*

$$\begin{cases} \text{................} = \text{................} & (\leftarrow \text{ ligne avec } x) \\ \text{................} = \text{................} & (\leftarrow \text{ ligne avec } y) \end{cases}$$

[étape facultative]

$$\begin{cases} \text{................} = \text{................} & (\text{égalité du type } x = \text{...}) \\ \text{................} = \text{................} & (\text{égalité du type } y = \text{...}) \end{cases}$$

Le couple solution du système est ………………………..….. .

IX. (1 point)

Compléter sans justifier la phrase :

Lorsque *x* décrit l'intervalle $]-\infty\,;-1[$, x^2 décrit l'intervalle ………………………… .

Conseils donnés à l'oral pendant le contrôle

I.

Il faut bien répondre à la question en suivant l'indication donnée : pas d'égalités, pas de notations mathématiques.

II.

Pour la dernière phrase, on n'écrit pas d'égalité et on n'écrit pas d'ensemble donc pas de notation mathématique.

VI.

Les notations x_M et y_M sont bannies.
On utilise les lettres x et y.

VII.

Pour écrire l'équation de $\mathcal{C}$, on écrit sur le graphique « $\mathcal{C}$: $y = ...$ ».
Il s'agit bien d'une égalité.
Les deux points signifient « a pour équation ».

J'ai écrit « l'équation de $\mathcal{C}$ » avec l'article défini. Rigoureusement, il faudrait dire « une » équation.

VIII.

Pour la conclusion, il faut bien penser à écrire le couple avec des parenthèses (et non des accolades !).

Les coefficients multiplicateurs négatifs doivent être écrits entre parenthèses.

IX.

La question signifie :
« Lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right[$, quelles sont toutes les valeurs possibles que prend x^2 ? »

C'est la signification du verbe « décrire » en mathématiques.

Corrigé du contrôle du 11-10-2017

I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left|x^2-1\right|=\left|2x\right|$ (1).
On effectuera la résolution au brouillon.

À un moment de la résolution, on pourra utiliser l'une des applications de la calculatrice permettant de résoudre des équations polynomiales.

On demande uniquement de compléter la phrase suivante en écrivant les valeurs exactes des solutions (sans égalité, uniquement séparées par virgules).

Les solutions de (1) sont $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$.

(1) est successivement équivalente à :

$x^2-1=2x$ ou $x^2-1=-2x$

$x^2-2x-1=0$ ou $x^2+2x-1=0$

$x=1+\sqrt{2}$ ou $x=1-\sqrt{2}$ ou $x=-1+\sqrt{2}$ ou $x=-1-\sqrt{2}$

On utilise la calculatrice pour résoudre les équations du second degré $x^2-2x-1=0$ et $x^2+2x-1=0$.

II.

Soit a un réel strictement positif quelconque.

Simplifier l'expression $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{a^5}-a\sqrt{a}}{a\sqrt{a^3}}$.

$$\mathrm{A}=\frac{\sqrt{a^5}-a\sqrt{a}}{a\sqrt{a^3}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^4\times a}-a\sqrt{a}}{a\sqrt{a^2\times a}} \quad \text{(réécriture)}$$

$$=\frac{\sqrt{a^4}\times\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{a\sqrt{a^2}\times\sqrt{a}} \quad \text{(utilisation de la règle de la racine carrée d'un produit)}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(a^2\right)^2}\times\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{a\times a\times\sqrt{a}} \quad \left(\sqrt{a^2}=a \text{ car } a>0\right)$$

$$=\frac{a^2\times\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{a^2\times\sqrt{a}} \quad \left(\sqrt{\left(a^2\right)^2}=a^2 \text{ car } a^2>0\right)$$

$$=\frac{\cancel{\sqrt{a}}\times\left(a^2-a\right)}{a^2\times\cancel{\sqrt{a}}}$$

$$=\frac{a^2-a}{a^2}$$

$$=\frac{\cancel{a}\times(a-1)}{\cancel{a}\times a}$$

$$=\frac{a-1}{a}$$

On peut aussi écrire $\mathrm{A}=1-\dfrac{1}{a}$.

III.

On considère les expressions $\mathrm{A}(x)=-x^2+2x+1$ et $\mathrm{B}(x)=(x-1)^3-(x+2)(x-3)(x-2)$.

1°) Mettre $\mathrm{A}(x)$ sous forme canonique en écrivant les étapes.

$$\mathrm{A}(x)=-\left(x^2-2x-1\right)$$

$$=-\left[\left(x^2-2x+1\right)-2\right]$$

$$=-\left[(x-1)^2-2\right]$$

$$=2-(x-1)^2$$

On vérifie le résultat en développant $2-(x-1)^2$. On peut aussi prendre des valeurs tests mais la méthode par développement est meilleure.

2°) Développer et réduire $\mathrm{B}(x)$.

$\mathrm{B}(x)=(x-1)^3-(x+2)(x-2)(x-3)$ (réécriture)

$=x^3-3x^2+3x-1-(x^2-4)(x-3)$ (utilisation des identités cubique et du second degré)

$=x^3-3x^2+3x-1-(x^3-3x^2-4x+12)$ (utilisation de parenthèses)

$=\cancel{x^3}\cancel{-3x^2}+3x-1\cancel{-x^3}\cancel{+3x^2}+4x-12$

$=7x-13$

Pour le développement de $(x-1)^3$, on utilise le développement de l'identité remarquable cubique : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

On constate que $\mathrm{B}(x)$ est une expression du premier degré en x (expression affine).

IV.

1°) Compléter la phrase suivante par une inégalité du type $x\geqslant \ldots$ ou $x\leqslant\ldots$.

$\sqrt{2-x}$ existe si et seulement si $x\leqslant 2$.

La condition pour que $\sqrt{2-x}$ existe est $2-x\geqslant 0$ qui est équivalente à $x\leqslant 2$.

2°) On considère l'équation $\sqrt{2-x}=3 \quad (1)$.
Compléter les lignes suivantes. Pour les pointillés de la première phrase, on attend un intervalle.

Dans l'intervalle $]-\infty\,;2]$, (1) est successivement équivalente à :

$2-x=9$ (le seul réel dont la racine carrée vaut 3 est 9)

$x=-7$ (qui convient car – 7 appartient bien à l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

La solution de l'équation (1) est – 7 (sans égalité).

V.

On considère la fonction $f: x\mapsto \dfrac{1}{3-|\,x\,|}$.
Compléter les équivalences suivantes :

$f(x)$ existe si et seulement si $3-|\,x\,|\neq 0$

si et seulement si $|\,x\,|\neq 3$

si et seulement si $x\neq 3$ $\boxed{\text{et}}$ $x\neq -3$

Compléter l'égalité d'ensembles dans la phrase suivante en utilisant les notations correctes.

L'ensemble de définition de *f* est $\boldsymbol{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\,;-3\}$.

$|\,x\,|=3$ équivaut à $x=3$ $\boxed{\text{ou}}$ $x=-3$.

La négation de la phrase « $x=3$ $\boxed{\text{ou}}$ $x=-3$ » est « $x\neq 3eeeee$ $\boxed{\text{et}}$ $x\neq -3eeeee$ ».

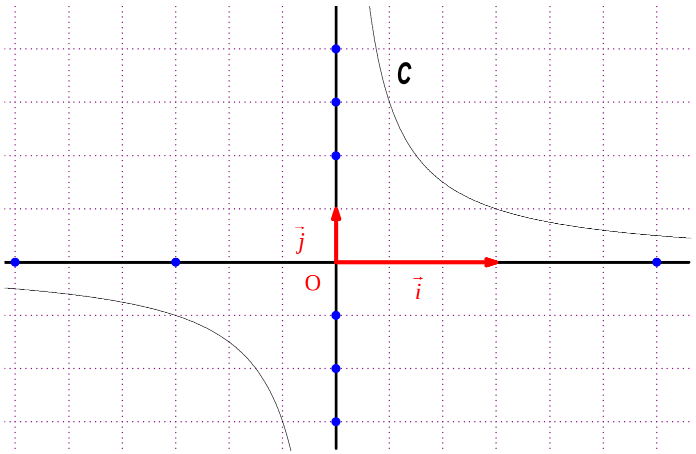
VI.

Dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $\mathrm{A}(3\,;1)$ et $\mathrm{B}(-2\,;1)$.
Écrire sans justifier un système de conditions traduisant l'appartenance d'un point M de coordonnées $(x\,;y)$ à la demi-droite $[\mathrm{AB})$. **Aide :** Il y a deux lignes car il y a deux conditions (une condition sur *x* et une condition sur *y*).

$$\begin{cases} x\leqslant 3 \\ y=1 \end{cases}$$

On fait un graphique au brouillon.
La droite (AB) a pour équation $y=1$.
Les points de la droite (AB) qui appartiennent à la demi-droite $[\mathrm{AB})$ sont caractérisés par le fait que leur abscisse est inférieure ou égale à 3.

VII.



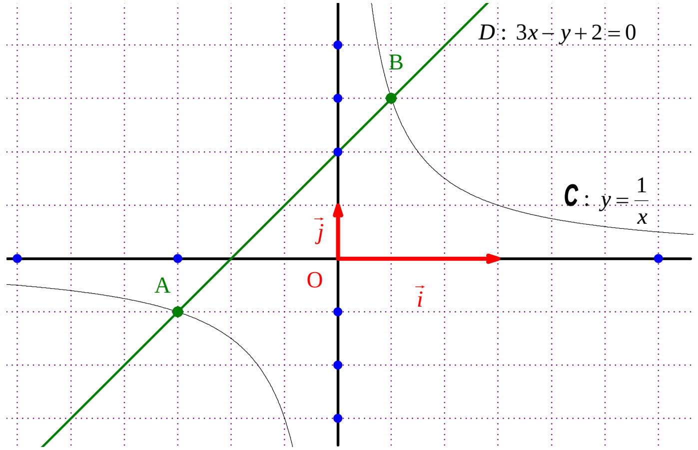
Écrire sur le graphique ci-contre l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ sachant que c'est la représentation graphique d'une fonction de référence puis tracer la droite D d'équation cartésienne $3x-y+2=0$.
On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D tels que $x_A < x_B$. Marquer ces points sur le graphique.

Compléter les phrases suivantes à l'aide d'intervalles ou de réunions d'intervalles donnant la position de $\mathcal{C}$ par rapport D.

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la « fonction inverse ». On écrit « $\mathcal{C}$: $y=\dfrac{1}{x}$ ». Il s'agit d'une équation de $\mathcal{C}$. Une autre équation de $\mathcal{C}$ est $xy=1$.

Les « : » signifient « a pour équation ».

La droite D passe par les points $\mathrm{U}\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ et $\mathrm{V}\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}$.
On écrit « D : $3x-y+2=0$ » sur le graphique. Il s'agit d'une équation cartésienne de D.



Il fallait faire attention à l'échelle : le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthogonal mais pas orthonormé.

On lit graphiquement $\mathrm{A}\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ et $\mathrm{B}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3}\\3\end{vmatrix}$.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de D sur $\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]0\,;\dfrac{1}{3}\right[$.
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de D sur $\left]-1\,;0\right[\cup\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
- $\mathcal{C}$ et D sont sécantes aux points A et B. *Il n'y a rien à compléter pour cette dernière phrase.*

VIII.

Compléter les lignes ci-dessous dont le but est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(\mathrm{I})\begin{cases}x\sqrt{2}+y=2\\x+y\sqrt{2}=-1\end{cases}$.
À la fin, on vérifiera la solution à l'aide de l'application de résolution des systèmes linéaires de la calculatrice.

Le déterminant du système (I) est égal à 1.
Comme il est non nul, (I) admet un unique couple solution.

$$\begin{cases}x\sqrt{2}+y=2\\x+y\sqrt{2}=-1\end{cases}\left|\begin{array}{l}\times\sqrt{2}\\ \times(-1)\end{array}\right.\qquad\left|\begin{array}{l}\times(-1)\\ \times\sqrt{2}\end{array}\right.$$

$\downarrow$ pour annuler les y $\qquad$ $\downarrow$ pour annuler les x

Les coefficients multiplicateurs négatifs doivent être écrits entre parenthèses.

$$\begin{cases} 1x = 2\sqrt{2}+1 & (\leftarrow \text{ ligne avec } x) \\ 1y = -\sqrt{2}-2 & (\leftarrow \text{ ligne avec } y) \end{cases}$$ [étape facultative]

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}+1 & (\text{égalité du type } x = ...) \\ y = -\sqrt{2}-2 & (\text{égalité du type } y = ...) \end{cases}$$

Le couple solution du système est $\left(2\sqrt{2}+1\,;-\sqrt{2}-2\right)$.

La calculatrice donne des valeurs approchées des solutions et non les valeurs exactes. Cela permet cependant de vérifier que la solution trouvée est correcte.

IX.

Compléter sans justifier la phrase :

Lorsque x décrit l'intervalle $]-\infty\,;-1[$, x^2 décrit l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

On peut s'appuyer sur la représentation graphique de la fonction « carré ».