1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 27 septembre 2017 (50 min)

Prénom : .... **Nom :** ....

Note : …. / 20

I. (1 point)

Soit x un réel quelconque. Compléter la phrase suivante par des inéquations portant sur x.

$|x-1| \geqslant 4$ équivaut à ………………………………………………………………………………

II. (6 points : 2 points à chaque fois)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement des équations (1) et (2) et de l'inéquation (3) suivantes (recherche au brouillon) : $\left|\dfrac{x}{2}-1\right|=2 \quad (1)$; $|3x-4|=|x| \quad (2)$; $3|x|-2 \geqslant |x|-1 \quad (3)$.

Détailler la résolution sur les lignes ci-dessous et ci-contre.

$S_1 =$	$S_2 =$	$S_3 =$ ....

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel où les variables x et y sont des nombres réels.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $x \geqslant 0$
  Alors y prend la valeur $1+\dfrac{x^2}{2}$
  Sinon y prend la valeur $1-\dfrac{x^2}{2}$
FinSi

Sortie :
Afficher y

1°) Quelle est la valeur de y affichée en sortie si la valeur de x saisie en entrée est $1-\sqrt{3}$?
On écrire la résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

.... (une seule égalité)

2°) Exprimer y en fonction de x en utilisant la valeur absolue. Écrire une seule égalité (sous la forme $y=$........).

……………………………………………………

IV. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{|x|}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit a un réel strictement positif.
Déterminer l' (les) antédécent(s) de a par f. On écrira le(s) réel(s) directement sur la ligne ci-dessous, sans égalité.

…………………………………………………

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit ABC un triangle quelconque du plan *P*.
On note I le milieu de $[AC]$ et L le point défini par l'égalité vectorielle $3\overrightarrow{AL}+2\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{CL}$ (1).

Dans tout l'exercice, on rapporte le plan *P* au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, I dans ce repère.

A | .... / ....   B | .... / ....   C | .... / ....   I | .... / ....

Pour la résolution des questions, il est demandé de n'utiliser que des calculs de coordonnées (pas de calcul vectoriel).

1°) Traduire l'égalité (1) en deux égalités avec les coordonnées x_L et y_L (à l'état « brut », sans calcul).
On remplacera les coordonnées de A, B, C par leurs valeurs.

$\begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$

Après avoir effectué les calculs nécessaires au brouillon, donner les coordonnées de L.

L | .... / ....

2°) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{BI}$ (aucune phrase n'est demandée). On écrira une seule égalité [premier membre : la notation du déterminant avec les valeurs numériques ; deuxième membre : le résultat].

....

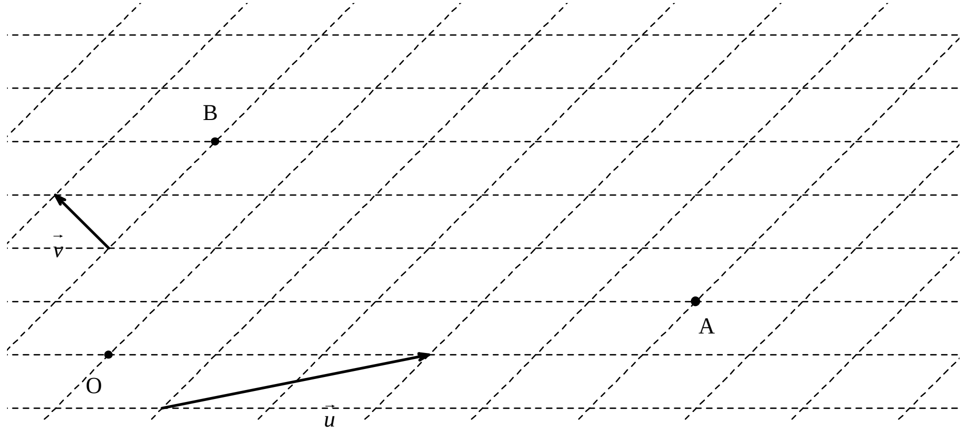
Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{BI}$? Que peut-on en déduire ? Répondre par une phrase.

....

....

VI. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

La figure ci-contre représente un maillage du plan *P* par des parallélogrammes.
On munit *P* du repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



1°) Quelles sont les coordonnées de A et B ? Écrire les égalités vectorielles correspondantes sur la ligne ci-dessous.

A | .... / ....   B | .... / ....

....

2°) Déterminer les coordonnées du point C tel que le quadrilatère OBAC soit un parallélogramme.

....

....

....

....

....

....

3°) Calculer les coordonnées du point I, centre du parallélogramme OBAC.

formule utilisée (avec les valeurs numériques)   résultat

I | x_I = ... = ...
  | y_I = ... = ...

Corrigé du contrôle du 27-9-2017

I.

Soit x un réel quelconque. Compléter la phrase suivante par des inéquations portant sur x.

$$|x-1|\geqslant 4 \text{ équivaut à } x\leqslant -3 \text{ ou } x\geqslant 5$$

II.

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement des équations (1) et (2) et de l'inéquation (3) suivantes : $\left|\frac{x}{2}-1\right|=2 \quad (1)$; $|3x-4|=|x| \quad (2)$; $3|x|-2\geqslant |x|-1 \quad (3)$.

Détailler la résolution sur les lignes ci-dessous et ci-contre.

$S_1=\{6\,;-2\}$	$S_2=\{2\,;1\}$	$S_3=\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

(1) est successivement équivalente à :

$\frac{x}{2}-1=2$ ou $\frac{x}{2}-1=-2$

$\frac{x}{2}=3$ ou $\frac{x}{2}=-1$

$x=6$ ou $x=-2$

(2) est successivement équivalente à :

$3x-4=x$ ou $3x-4=-x$

$2x=4$ ou $4x=4$

$x=2$ ou $x=1$

(3) est successivement équivalente à :

$2|x|\geqslant 1$

$|x|\geqslant \frac{1}{2}$

$x\leqslant -\frac{1}{2}$ ou $x\geqslant \frac{1}{2}$

Pour l'inéquation (3), la méthode consiste à se ramener à une inéquation du type $|x|\geqslant a$ ou $|x|\leqslant a$.
On ne peut pas résoudre l'inéquation autrement.

III.

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel où les variables x et y sont des nombres réels.

> **Entrée :**
> Saisir x
>
> **Traitement :**
> **Si** $x\geqslant 0$
> **Alors** y prend la valeur $1+\frac{x^2}{2}$
> **Sinon** y prend la valeur $1-\frac{x^2}{2}$
> **FinSi**
>
> **Sortie :**
> Afficher y

1°) Quelle est la valeur de y affichée en sortie si la valeur de x saisie en entrée est $1-\sqrt{3}$?
On écrire la résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.

$y=\sqrt{3}-1$ (une seule égalité)

$$\begin{aligned}y&=1-\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2}\\&=1-\frac{1-2\sqrt{3}+3}{2}\\&=1-\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\\&=1-\left(2-\sqrt{3}\right)\\&=\sqrt{3}-1\end{aligned}$$

2°) Exprimer y en fonction de x en utilisant la valeur absolue. Écrire une seule égalité (sous la forme $y=$........).

$$y=1+\frac{x\times|x|}{2}$$

Si $x\geqslant 0$, alors $1+\frac{x\times|x|}{2}=1+\frac{x\times x}{2}=1+\frac{x^2}{2}$.

Si $x<0$, alors $1+\frac{x\times|x|}{2}=1+\frac{x\times(-x)}{2}=1-\frac{x^2}{2}$.

IV.

On considère la fonction $f: x\mapsto \frac{2}{|x|}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit a un réel strictement positif.
Déterminer l' (les) antédécent(s) de a par f. On écrira le(s) réel(s) directement sur la ligne ci-dessous, sans égalité.

$$\frac{2}{a}\ ;\ -\frac{2}{a}$$

On résout l'équation $f(x)=a$ (1) dans $\mathbb{R}^*$.

(1) est successivement équivalente à :

$2=a\times|\,x\,|$

$|\,x\,|=\dfrac{2}{a}$

$x=\dfrac{2}{a}$ ou $x=-\dfrac{2}{a}$ (car $\dfrac{2}{a}>0$)

V.

Soit ABC un triangle quelconque du plan *P*.
On note I le milieu de $[\mathrm{AC}]$ et L le point défini par l'égalité vectorielle $3\overrightarrow{\mathrm{AL}}+2\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\overrightarrow{\mathrm{CL}}$ (1).

Dans tout l'exercice, on rapporte le plan *P* au repère $\left(\mathrm{A},\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.
Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, I dans ce repère.

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad\mathrm{B}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ $\quad\mathrm{C}\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $\quad\mathrm{I}\left|\begin{matrix}0\\\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right.$

Pour la résolution des questions, il est demandé de n'utiliser que des calculs de coordonnées (pas de calcul vectoriel).

> On commence par faire une figure au brouillon en prenant soin de prendre ABC quelconque (et non rectangle en A).
> On peut alors faire apparaître le maillage du plan par des parallélogrammes associé au repère.

1°) Traduire l'égalité (1) en deux égalités avec les coordonnées x_{L} et y_{L} (à l'état « brut », sans calcul).
On remplacera les coordonnées de A, B, C par leurs valeurs.

$$\begin{cases}3\left(x_{\mathrm{L}}-0\right)+2\left(x_{\mathrm{L}}-1\right)=x_{\mathrm{L}}-0\\3\left(y_{\mathrm{L}}-0\right)+2\left(y_{\mathrm{L}}-0\right)=y_{\mathrm{L}}-1\end{cases}$$

Après avoir effectué les calculs nécessaires au brouillon, donner les coordonnées de L.

$$\mathrm{L}\left|\begin{matrix}\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{4}\end{matrix}\right.$$

2°) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ (aucune phrase n'est demandée). On écrira une seule égalité [premier membre : la notation du déterminant avec les valeurs numériques ; deuxième membre : le résultat].

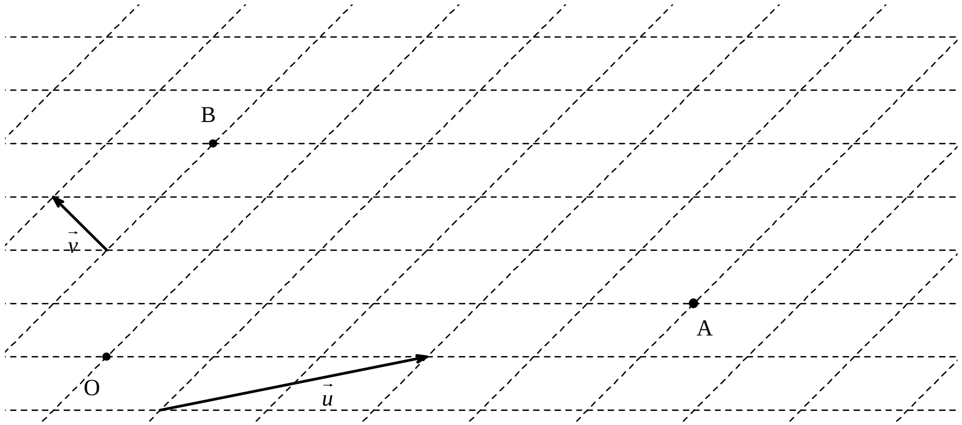
$$\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & 1\\-\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times1=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=0$$

Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$? Que peut-on en déduire ? Répondre par une phrase.

Comme le déterminant est égal à 0, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ sont colinéaires.
Par suite, les droites (AL) et (BI) sont parallèles.

VI.

La figure ci-contre représente un maillage du plan *P* par des parallélogrammes.
On munit *P* du repère $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.
Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.



On peut tracer finement les axes du repère.

1°) Quelles sont les coordonnées de A et B ? Écrire les égalités vectorielles correspondantes sur la ligne ci-dessous.

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$ $\quad\mathrm{B}\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\vec{u}-\vec{v}$ $\quad\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{u}+3\vec{v}$

2°) Déterminer les coordonnées du point C tel que le quadrilatère OBAC soit un parallélogramme.

OBAC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ (1).

On traduit (1) en coordonnées $\begin{cases}1=2-x_{\mathrm{C}}\\3=-1-y_{\mathrm{C}}\end{cases}$ ce qui donne immédiatement $\begin{cases}x_{\mathrm{C}}=1\\y_{\mathrm{C}}=-4\end{cases}$.

$$\mathrm{C}\left|\begin{array}{l}1\\-4\end{array}\right.$$

3°) Calculer les coordonnées du point I, centre du parallélogramme OBAC.

OBAC est un parallélogramme donc son centre I est le milieu des diagonales $[\mathrm{OA}]$ et $[\mathrm{BC}]$.

On utilise donc la formule de calcul des coordonnées d'un segment.
Nous avons choisi $[\mathrm{OA}]$ mais on peut aussi bien prendre $[\mathrm{BC}]$.
On trouve le même résultat dans les deux cas.

formule utilisée (avec les valeurs numériques) résultat

$$\mathrm{I}\left|\begin{array}{l}x_{\mathrm{I}}=\dfrac{0+2}{2}=1\\[2ex] y_{\mathrm{I}}=\dfrac{0-1}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

On vérifie graphiquement le résultat.